Prof. N. A'Campo Frühlingssemester 2011

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen und Singularitäten II

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien V, E, F endlich dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und sei $U \subset V$ offen. Sei $P : C^\infty(U, E) \to C^\infty(U, F)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Zeige, für $p \in U, f \in C^\infty(U)$ und für $s \in C^\infty(U, E)$, dass

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-k}(e^{-tf} P(e^{tf} s))(p) \in F$$

nur von $(Df)_p \in V^*$ und $s(p) \in E$ abhängt. Definiere das Symbol von P an der Stelle $p \in \Omega$ als

$$\mathrm{Symb}_p(P)(L)(u) = v =: \lim_{t \to +\infty} t^{-k}(e^{-tkf} P(e^{tf} s))(p) \in F$$

wobei f, s mit $(Df)_p = L$ und $s(p) = u$ gewählt sind. Interpretiere $\mathrm{Symb}_p(P)(L)$ lineare Abbildung von E nach F. Dann ist $\mathrm{Symb}_p(P)$ eine C^∞-Abbildung von V^* nach $\mathrm{Hom}(E, F)$.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Sei $E = F = \mathbb{R}$. Sei $V = \mathbb{R}^n$ und sei P der Laplace Operator Δ. Berechne $\mathrm{Symb}_p((\Delta)$.

Aufgabe 3. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, seien $E \to M$ und $F \to M$ Vektorbundel. Sei $P : \Gamma^\infty(M, E) \to \Gamma^\infty(M, F)$ ein linearer differentialoperator der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Definiere

$$\mathrm{Symb}(P) : T^*M \to \mathrm{Hom}(E, F)$$

Hinweis: $\mathrm{Hom}(E, F)$ ist ein Vektorbundel. Die Faser für $p \in M$ ist $\mathrm{Hom}(E_p, F_p)$. Das Symbol des Differentialoperators P ist an der Stelle $p \in M$ eine Abbildung $\mathrm{Symb}_p(P) : (T_pM)^* \to \mathrm{Hom}(E_p, F_p)$.

Aufgabe 4. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Berechne das Symbol des Operators $*d*d : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$.

Aufgabe 5. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Berechne das Symbol von $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$.