Prof. N. A'Campo Frühlingssemester 2011

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen und Singularitäten II

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $s \in \mathbb{R}$ sei $\mathrm{Sob}^s(S^1)$ der Raum aller messbaren Funktionen $f : S^1 \to \mathbb{C}$, deren Fourierkoefficienten $(FR_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ die Ungleichung

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} FR_n(f)\bar{FR_n}(f)(1+n^2)^{s/2} < +\infty$$

erfullen. Zeige, dass

$$f \in \mathrm{Sob}^s(S^1) \mapsto \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{Z}} FR_n(f)\bar{FR_n}(f)(1+n^2)^{s/2}} \in \mathbb{R}$$

eine vollständige Norm auf $\mathrm{Sob}^s(S^1)$ ist.

Aufgabe 2. Für $k \in \mathbb{N}$, bestimme ein $s \in \mathbb{R}$ derart, dass $C^k(S^1,\mathbb{C}) \subset \mathrm{Sob}^s(S^1)$ gilt.

Aufgabe 3. Zeige:

$$C^\infty(S^1,\mathbb{C}) = \bigcap_{s\in\mathbb{N}} \mathrm{Sob}^s(S^1)$$

Aufgabe 4. Zeige, für $s > 3$, dass $\Delta : \mathrm{Sob}^s(S^1) \to \mathrm{Sob}^{s-2}(S^1)$ ein Fredholm Operator ist.

Aufgabe 5. Für $t, s \in \mathbb{R}$, $t > s$, zeige, dass die Inklusion $\mathrm{Sob}^t(S^1) \to \mathrm{Sob}^s(S^1)$ ein kompakter Operator ist.

Die Räume $\mathrm{Sob}^s(S^1)$ sind Beispiele von sogenannten Sobolev Räume. Siehe: `http : //en.wikipedia.org/wiki/Sergei_Sobolev`