Prof. N. A'Campo Frühlingssemester 2011

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen und Singularitäten II

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei X eine Menge. Sei $F(X)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Funktionen auf X. Sei $A \subset F(X)$ ein Untervektorraum. Für $a, b \in \mathbb{R}, f \in A$ sei $U_{a,b,f}$ die Teilmenge $U_{a,b,f} := \{p \in X \mid a < f(p) < b\}$. Sei T_A die Topologie auf X, die von den Teilmengen $U_{a,b,f}$ erzeugt wird. Sei $F_A(X)$ der Vektorraum aller für T_A stetigen Funktionen auf X. Gilt $A = F_A(X)$?, $A \subset F_A(X)$? oder $T_A = T_{F_A(X)}$?

Aufgabe 2. (Fortsetzung.) Seien A, B Untervektorräume in $F(X)$. Wir nehmen an, dass die Topologie T_A kompakt ist. Sei B so, dass $F_A(X)$ ein echter Unterraum in B ist. Zeige, dass die Topologie T_B nicht kompakt ist. Sei B so, dass $F_B(X)$ ein echter Unterraum in $F_A(X)$ ist. Zeige, dass die Topologie T_B nicht kompakt ist.

Aufgabe 3. Seien X, Y kompakte metrische Räume. Wir nehmen an, dass die Ringe $C^0(X, \mathbb{R})$ und $C^0(Y, \mathbb{R})$ isomorph sind. Zeige, dass die Räume X, Y homöomorph sind.
Hinweis: Punkte $p \in X$ entsprechen maximale Ideale des Ringes $C^0(X, \mathbb{R})$, nämlich, setze $m_p := \{f \in C^0(X, \mathbb{R}) \mid f(p) = 0\}$. Zeige: $p \in X \mapsto m_p \in \mathrm{Spec}(C^0(X, \mathbb{R}))$ ist eine Bijektion. Ein Ringisomorphismus $\phi : C^0(X, \mathbb{R}) \to C^0(Y, \mathbb{R})$ induziert eine Bijection $H_\phi : X \to Y$. Zeige, dass H_ϕ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 4. Sei E ein Banachraum. Sei X der abgeschlossene Einheitsball in E. Sei $A \subset F(X)$ der Vektorraum aller Einschränkungen auf X der stetigen Linearformen auf E. Zeige, dass die Topologie T_A auf X eine kompakte ist.
Hinweise: Sei Y der Einheitsball im Dualraum E^*. Sei der Produktraum I^Y, $I := [-1, 1]$ ausgestattet mit der Produkttopologie, die kompakt ist. Sei $\phi : X \to I^Y$ die Abbildung $u \in X \mapsto (L(u))_{L \in Y} \in I^Y$. Die Abbildung ϕ ist injektiv, das Bild ist abgeschlossen in I^Y, die Topologie T_A und die von I^Y auf X induzierte Topologie sind gleich.