Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2010

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen und Singularitäten I

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei

$$P(x) = (x - s_1)(x - s_2). \cdots .(x - s_{2g+2}),\ s_1, s_2, \cdots, s_{2g+1} \in \mathbb{C},\ g \geq 1$$

ein Polynom mit $2g+1$ verschieden Nullstellen. Sei $X := \{p \in \mathbb{C}^2 \mid y(p)^2 = P(x(p))\}$. Zeige, dass X eine Riemannsche Fläche ist.

Aufgabe 2. Die Abbildung $p \in X \mapsto x(p) \in \mathbb{C}$ ist generell zwei zu eins. Berechne die Eulercharacteristik von X.

Aufgabe 3. Schliesse X in $P^2(\mathbb{C})$ ab. Wir erhalten eine Riemannsche Fläche Y von Geschlecht g. Die Menge $Y \setminus X$ hat einen Punkt.

Aufgabe 4. Zeige, dass der Ausdruck

$$\frac{x^{j-1}dy}{y}, j = 1, \cdots, g$$

eine holomorphe 1-Differentialform ϕ_j vom Typus $(1,0)$ auf Y definiert. Hinweis: lokal bei $(s_k, 0)$ lässt X sich holomorph parametrizieren: $t \in \mathbb{C}$, $|t| < \epsilon, \mapsto \chi_k(t) = ((t - s_k)^2, T_k(t - s_k)) \in X \subset \mathbb{C}^2$. Die Funktion T_k ist lokal impliziet durch $y^2 - P(x) = 0$ gegeben. Studiere lokal die Form $\chi_k^*(\frac{x^{j-1}dy}{y})$. Untersuche auch was passiert in $Y \setminus X$.

Aufgabe 5. Zeige, dass die Formen ϕ_j, $j = 1, \cdots, g$, $\mathbb{C}$-linear unabhängig sind. Hinweis: Untersuche das Wachstum bei $x \to \infty$ der Funktionen $\frac{\phi_k}{\phi_h}$.

Aufgabe 6. Zeige, dass die Formen $\phi_j, \bar{\phi_j}$, $j = 1, \cdots, g$, $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind. Hinweis: Eine Hälfte der Formen ist vom Typus $(1,0)$, die andere vom Typus $(0,1)$.

Aufgabe 7. Zeige, dass die Formen ϕ_j, $j = 1, \cdots, g$, eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes aller holomorphen Schnitten von T^*Y bilden. Hinweis: $\mathrm{Dim} H^1_{dR}(Y) = 2g$.