Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2010

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen und Singularitäten I

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei ω eine (beliebig oft differenzierbare) 2-Differentialform auf S^2. Wir nehmen an, dass $\int_{S^2} \omega = 0$ gilt. Konstruiere eine 1-Differentialform α auf S^2 mit $d\alpha = \omega$. Berechne $H^2_{dR}(S^2, \mathbb{R})$.

Aufgabe 2. Sei Σ_g eine differenzierbare Fläche von Geschlecht $g \in \mathbb{N}$. Zeige $\mathrm{Dim} H^2_{dR}(\Sigma_g, \mathbb{R}) = 1$.

Aufgabe 3. Sei $(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mapsto X_{t,p} \in T_pM$ ein nicht-automomes C^∞-Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M. Sei $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ der Fluss zu X, d.h.

$$\frac{d}{dt}\,\Phi(p,t) = X_{t,\Phi(p,t)}, \Phi(p, 0) = p, p \in M,\, t \in \mathbb{R}$$

Es gilt nicht, wie für autonome Vektorfelder: $\Phi(p, t + s) = \Phi(\Phi(p, t), s), p \in M, t, s \in \mathbb{R}$. Wir notieren $\Phi_t : M \to M$ die Abbildung $p \in M \mapsto \Phi(p, t) \in M$. Man kann die Abbildung $t \in \mathbb{R} \mapsto (\mathrm{Trans}_t, \Phi_t) \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R} \times M)$ als Darstellung der Gruppe $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Diffeomorphismen vom $\mathbb{R} \times M$ interpretieren. Die Wirkung ist: $(\mathrm{Trans}_t, \Phi_t)(s, p) := (s + t, \Phi(p, t))$. Diese Wirkung stammt von ein autonomes Vektorfeld auf $\mathbb{R} \times M$.

Die Geschwindigkeit $\frac{d}{dt}\,\Phi(p, t)$ des Weges $t \mapsto \Phi(p, t)$ ist ein Tangentialvektor an der Stelle $\Phi_t(p)$, nämlich $X_{t,\Phi_t(p)}$. Sei Y_t das nicht-autonome Vektorfeld $Y_t := \Phi_{-t} * X_t$, explizieter:

$$Y_{t,p} := d(\Phi_{-t})_{\Phi_t(p)}(X_{t,\Phi_t(p)})$$

Das Vektorfeld $-Y_t$ generiert auch einen Fluss und Darstellung, nämlich die Darstellung $t \in \mathbb{R} \mapsto (\mathrm{Trans}_{-t}, \Phi_{-t})$.

Sei nun $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir erhalten eine Kurve von Funktionen: $t \in \mathbb{R} \mapsto (f_t : M \to \mathbb{R})$ wobei $f_t := f \circ \Phi_t = \Phi_t^* f$ ist. Es gilt: $\Phi_t^* f_{-t} = f = \Phi_{-t}^* f_t$. Gleiches gilt für eine Differentialform ω auf M. Wir erhalten eine Kurve $\omega_t := \Phi_t^* \omega$ von Differentialformen.

Zeige für Funktionen f, g, h:

$$\frac{d}{dt}\,f_t = \Phi_t^*\,(i_{Y_t}(df_t))$$

$$\frac{d}{dt}\,df_t = \Phi_t^*\,d((i_{Y_t}(df_t))$$

$$\frac{d}{dt}\,g_t df_t = \Phi_t^*\,(d(i_{Y_t} g_t df_t) + \,i_{Y_t} d(g_t df_t))$$

$$\frac{d}{dt}\,g_t df_t \wedge dh_t = \Phi_t^*\,(d i_{Y_t}(g_t df_t \wedge dh_t) + \,i_{Y_t} d(g_t df_t \wedge dh_t))$$

Zeige für eine Differentialform ω:

$$\frac{d}{dt}\,\omega_t = \Phi_t^*(d(i_{Y_t}\omega_t) + i_{Y_t}d\omega_t)$$

Aufgabe 4. Wir definieren die Liesche (Richtungs)Ableitung einer Differentialform ω in der Richtung eines Vektorfeldes Z durch:

$$L_Z\omega := (\frac{d}{dt}\,\Phi_t^*\omega)_{t=0}$$

wobei $t \mapsto \Phi_t$ der lokale Fluss zu Z ist. Zeige:

$$L_Z\,\omega := di_Z\omega + i_Z d\omega$$

Aufgabe 5. (Fortsetzung $3+4$) Jürgen Moser's Trick für Volumenformen.
siehe `http://en.wikipedia.org/wiki/Juergen_Moser`
Seien ω_1 und ω_0 zwei Volumenformen auf einer kompakten zusammenhängende Mannigfaltigkeit M. Wir nehmen an, dass M bezüglich ω_1 und ω_0 das gleiche Volumen hat. Dann ist die Form $\omega_1 - \omega_0$ exakt, d.h. es existiert eine Form α mit $d\alpha = \omega_1 - \omega_0$. Wir suchen nun ein nicht-autonomes Vektorfeld X_t mit Fluss Φ_t, derart, dass $\Phi_1^*\omega_1 = \omega_0$ gilt. Dazu:

Schritt 1. Der Weg $t \in [0,1] \mapsto \omega_t := (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ ist ein Weg von Volumenformen.

Schritt 2. Wir suchen mehr, nämlich sollte gelten: $\Phi_t^*\omega_t = \omega_0$ für alle $t \in [0,1]$. Dann würde gelten:

$$0 = \frac{d}{dt}\,\Phi_t^*\omega_t = \Phi_t^*(L_{Y_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t) = \Phi_t^*(di_{Y_t}\omega_t + d\alpha)$$

Hier erzeugte nun $-Y_t$, wie in der Aufgabe 3, das inverse der gesuchten Darstellung $t \in \mathbb{R}(\mathrm{Trans}_{-t}, \mapsto \Phi_{-t})$.

Schritt 3. (Der Trick!). Diese komplizierte Gleichung für Y_t wäre erfüllt, wenn die einfachere Gleichung $i_{Y_t}\omega_t + \alpha = 0$ erfüllt wäre! Diese ieinfachere Gleichung lässt sich tatsächlich expliziet und eindeutig nach Y_t lösen, da für jedes $t \in [0,1]$ die Form ω_t eine Volumenform ist.

Aufgabe 6. **Satz:** *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Seien ω_1 und ω_0 zwei geschlossene Kohomologe Differentialformen. Wir nehmen an, dass diese Formen Volumenformen oder symplectische Formen sind. Dann sind die Formen ω_1 und ω_0 isotop.*