Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2010

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen und Singularitäten I

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei Γ ein Graph mit endlich vielen Ecken und Kanten. Wir nehmen an, dass in Γ jede Kante zwei Ecken hat und zwei Kanten höchtens eine Ecke gemeinsam haben. Sei $\phi : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Einbettung. Zeige, die Existenz einer stetigen Abbildung $\Gamma \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, derart, dass für $t \in [0,1]$ die Abbildung $p \in \Gamma \mapsto \phi(p,t) \in \mathbb{R}^2$ eine Einbettung ist, dass $\phi(p,0) = \phi(p), p \in \Gamma$, gilt, und dass die Einbettung $p \in \Gamma \mapsto \phi(p,1) \in \mathbb{R}^2$ kantenweise linear ist.

Aufgabe 2. Seien $x, y : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ die komplexen Koordinaten Funktionen zu der Basis $(1,0),(0,1)$ von $\mathbb{C}^2$. Für $a \in \mathbb{C}^2$ sei $||a|| := |x(a)| + |y(a)|$. Für $a, b \in \mathbb{C}^2$, $||a|| < 1/2$, $||b|| < 1/2$, sei $J_{a,b} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $J_{a,b} \times J_{a,b} = -\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$, mit $J_{a,b}(1,0) = (i,0) + a$ und $J_{a,b}(0,1) = (0,i) + b$. Der Endomorphismus $J_{0,0}$ ist die Multiplikation mit i auf $\mathbb{C}^2$. Die Abbildung $(a,b) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \mapsto J_{a,b}$, $||a||, ||b|| < 1/2$, parametriziert eine Umgebung von $J_{0,0}$ im Raum X aller $\mathbb{R}$-Endomorphismen J von $\mathbb{C}^2$ mit $J \times J = -\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$. Ist der Raum X eine differenzierbare oder komplexe Mannigfaltigkeit? Welche Dimension hat X?

Aufgabe 3. Seien $A, B : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ $\mathbb{R}$-linear. Wir definieren auf $U := \{p \in \mathbb{C}^2 \mid ||A(p)||, ||B(p)|| < 1/2$ ein J-Feld I als die Zuordnung $p \in U \mapsto I_p := J_{A(p),B(p)}$. Berechne für $p \in U$ die Dimensionen von $\Omega_I^{1,0}(U,\mathbb{C})$ und $\Omega_I^{0,2}(U,\mathbb{C})$. Hier ist $\Omega_I^{n,m}$ ein Faktor der Hodge Zerlegung für das J-Feld I. Berechne den Nijenhuis Tensor $N : \Omega_I^{1,0}(U,\mathbb{C}) \to \Omega_I^{0,2}(U,\mathbb{C})$. Ist der Nijenhuis Tensor wirklich ein Tensor?

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Bestimme expliziet A, B derart, dass an der Stelle $0 \in \mathbb{C}^2$ die Abbildung N_0 nicht die Nullabbildung ist.

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ I-holomorph, $I_p = J_{A(p),B(p)}$ und A, B wie in Aufgabe 4. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 6. Für eine komplexe Zahl $t, t \neq 0$, sei S_t die Untergruppe in $\mathbb{C}^*$, die von t erzeugt wird. Für welche t ist $\mathbb{C}^*/S_t$ eine kompakte Riemannsche Fäche?

Aufgabe 7. Sei μ ein Mass auf S_1. Die Fourierreihe von μ ist die Reihe

$$FR(\mu) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(\theta \in S_1 \mapsto e^{-2\pi k i \theta}) e^{2\pi k i \theta}$$

Zeige, dass die Gleichung $f'' = \mu$ mit f stetig eine Lösung hat, wenn $\mu(\theta \in S_1 \mapsto 1) = 0$ gilt. Wie ist f'' zu verstehen?

Aufgabe 8. Sei M eine orientierbare kompakte zusammenhängende Fläche. Eine Brille in M ist ein Paar (a,b) von Untermannigfaltigkeiten a, b derart, dass a und b diffeomorph zu S^1 sind und dass a und b sich in einem Punkt transversal schneiden. Zeige, dass das Geschlecht $g(M)$ von M die maximale

Anzahl k von Brillen $(a_1, b_1), \cdots, (a_k, b_k)$ mit $(a_i \cup b_i) \cap (a_j \cup b_j) = \emptyset, 1 \leq i < j \leq k$, ist. Hinweis: konstruiere geschlossene 1-Differentialformen $\alpha_i, \beta_i, 1 \leq i \leq g(M)$ deren Wegintegrale über a_j, b_j alle verschwinden, ausgenommen dass die Wegintegrale von α_i über a_i und β_i über b_i alle ± 1 sind. Zeige, dass die Kohomologieklassen der Formen α_i, β_i in $H^1_{DR}(M, \mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 9. (Fortsetzung). Wähle auf M eine Orientierung und wähle in M ein maximales System $(a_1, b_1), \cdots, (a_g, b_g)$ von Brillen. Wir orientieren die Untermannigfaltigkeiten a_i, b_i derart, dass das Paar von orientierten Tangentialrichtungen im Schnittpunkt P_i von a_i und b_i mit der Orientierung von M an der Stelle P_i übereinstimmt. Wähle weiter die Formen α_i, β_i so, dass die Wegintegrale $\int_{a_i} \alpha_i, \int_{b_i} \beta_i$ gleich $+1$ sind. Definiere auf $H^1_{DR}(M, \mathbb{R})$ eine nichtentartete schiefsymetrische Bilinearform. Hinweis: Berechne $\int_M u \wedge v$ mit u, v aus $\{\alpha_i, \beta_j\}$.

Aufgabe 10. Sei M eine Riemannsche Fläche von Geschlecht 1. Sei (a, b) eine Brille in M. Sei ω eine holomorphe 1-Differentialform vom Typus $(1, 0)$ derart, dass $\int_a \omega = 1$. Sei Γ in C die abelsche Gruppe, die von 1 und $\int_b \omega$ aufgespannt wird. Zeige, dass Γ ein Gitter ist.

Aufgabe 11. (Fortsetzung). Definiere eine biholomorphe Abbildung $\pi : M \to \mathbb{C}/\Gamma$.

Aufgabe 12. Sei $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ eine homogene polynomiale Abbildung von Grad $d \in \mathbb{N}, d > 0$. Wir nehmen an, dass $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ und $dF : \mathbb{C}^3 \to (\mathbb{C}^3)^*$ auf $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ keine gemeinsame Nullstelle haben. Zeige, dass das Nullstellengebilde von F in $P^2(\mathbb{C})$ eine Riemannsche Fläche ist.