Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2010

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flaechen und Singularitaeten I

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $S_\pi := S := \{p \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z(p) \geq 0\}$. Sei R_S auf S die minimale Äquivalenzrelation, die ti mit $-ti$ identifiziert, $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $X := S/R_S$ homeomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist. Zeige, dass die Function $p \in S \mapsto z(p)^2 \in \mathbb{C}$ eine Abbildung $\phi : X \to \mathbb{C}$ definiert. Definiere X mittels ϕ als Riemannsche Fläche.

Aufgabe 2. Sei $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. Wir nehmen vorerst an, dass $\alpha < 2\pi$ gilt. Sei S_α in $\mathbb{C}$ einen abgeschlossenen Sektor mit Winkel α. Sei X_α der Quotient von S_α, wobei die Kanten von S_α längentreu identifiziert werden. Definiere X_α als Riemannsche Fläche, derart dass, die Quotientenabbildung $S_\alpha \to X_\alpha$ im Innere von S_α holomorph ist. Was passiert für $\alpha = 2\pi, \alpha > 2\pi$? Hinweis: sei $a := \pi/\alpha$. Betrachte auf S die Funktion $(z(p) - z(s))^a$. Hier ist s der Scheitelpunkt von S.

Aufgabe 3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 2. Eine komplexe Struktur auf V ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $J : V \to V$ mit $J \circ J = -\mathrm{Id}_V$. Sei J_0 eine komplexe Struktur auf V und sei $v \in V, v \neq 0$. Sei M die Menge aller komplexen Strukturen auf V. Wir möchten M mit der Struktur einer Riemannschen Flächen ausstatten. Diese Struktur wird vorerst von der Wahl von J_0 und v abhängen. Wir definieren $z_{J_0,v} : M \to \mathbb{C}$ wie folgt. Für $J \in M$ schreibe $J(v)$ als linearkombination $J(v) = x(J)v + y(J)J_0(v)$ und setze $z_{J_0,v}(J) := x(J) + iy(J) \in \mathbb{C}$. Bestimme das Bild von der Abbildung $z_{J_0,v}$. Fasse $z_{J_0,v} : M \to \mathbb{C}$ als Karte einer Struktur der Riemannsche Fläche auf M auf. Somit wird die Menge M zu einer Riemannschen Fläche.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Seien $J_1 \in M, u \in V, u \neq 0$. Zeige, dass die Karten $z_{J_0,v}$ und $z_{J_1,u}$ holomorph verträglich sind, falls ein lineares $A : V \to V$, $A \neq 0$, existiert, derart, dass $J_0 \circ A = A \circ J_1$ gilt. Hinweis: für $A : V \to V$, $A \neq 0$, mit $J_0 \circ A = A \circ J_1$ berechne die Koordinatensubstitution von $z_{J_0,v}$ in $z_{J_1,u}$.

Aufgabe 5. Sei P_N in $\mathbb{C}$ die konvexe Hulle der Nullstellen des Polynoms $z^N - 1$. Wir nehmen an, dass $N \in \mathbb{N}$ gerade mit $N > 2$ ist. Sei t eine Permutation der Kanten von P_N. Wir nehmen an, dass t die Ortnung 2 hat und für jede Kante k gilt: $t(k) \neq k$. Identifiziere längentreu und orientierungs untreu für jede Kante k von P_N die Kanten k und $t(k)$. Es entsteht eine topologische Fläche X_t. Bestimme die Eulercharakteristik von X_t. Hinweis: ein Beispiel für t ist die antipodale Involution. Studiere vorerst mit $N = 4, 6, 8$.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Definiere X_t als Riemannsche Fläche, derart dass, die Quotientenabbildung $P_N \to X_t$ im Innere von P_N holomorph ist.