Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2007

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen.

8. Aufgabenblatt.

Aufgabe 1. Sei f eine beliebig oft differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Es gilt, dass für jede Stelle $p \in \mathbb{R}$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass die k^{te} Ableitung von f an der Stelle p verschwindet. Zeige, das f eine polynomiale Funktion ist.

Aufgabe 2. Sei X eine abgeschlossene Teilmenge in $P^2(\mathbb{C})$. Wir nehmen an, dass für jedes $p \in X$ eine lokale holomorphe Funktionen $f : U \to \mathbb{C}, p \in U$ existiert, so dass $U \cap X$ die Menge der Nullstellen von f ist. Zeige, dass X die Menge der Nullstellen in $P(\mathbb{C}^2)$ eines homogenes Polynom $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 3. Sei $X \subset P^3(\mathbb{C})$ eine holomorphe 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zeige, dass 3 homogene Polynome $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ existieren, so dass X in $P^3(\mathbb{C})$ der Durchschnitt der Nullstellenmengen von F_1, F_2, F_3 ist.

Aufgabe 4. Sei S eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht g. Sei K das kanonische Bundel von S. Berechne die Dimensionen der Garbenkohomologiegruppen $H^0(S, K^{\otimes i}), H^1(S, K^{\otimes i}), i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5. Sei S eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht $g > 1$. Für $P \in S$ sei $V_P := \{\omega \in \Gamma(S, K^{\otimes 3}) \mid \omega_P = 0\}$. Berechne die Dimension von V_P. Für $P, Q \in S, P \neq Q$, sei $V_{P,Q} := \{\omega \in \Gamma(S, K^{\otimes 3}) \mid \omega_P = 0, \omega_Q = 0\}$. Berechne die Dimension von $V_{P,Q}$. Schliesse: $V_P \neq V_Q$. Für $P \in S$ sei $V_{2P} := \{\omega \in \Gamma(S, K^{\otimes 3}) \mid \omega_Q \text{ relativ} - \text{klein} - \text{bezueglich } z_P(Q) \text{ ist}\}$ wobei z_P eine lokale holomorphe Koordinatenfunktion auf S um P ist. Zeige: $V_{2P} \subset V_P$ und berechne die Dimension von V_{2P}.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Definiere eine holomorphe Abbildung $k : S \to P^N(\mathbb{C}), N = 5g - 2$.

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Zeige, dass k injektiv und ohne Singularitäten ist.

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Konstuiere eine holomorphe Einbettung $k : S \to P^3(\mathbb{C})$.

Aufgabe 9. Jede kompakte Riemannsche Fläche ist biholomorph zu einer algebraischen Kurve in $P^3(\mathbb{C})$.