Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2007

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen.

6. Aufgabenblatt.

Aufgabe 1. Sei M eine Riemannsche Fläche. Ein Divisor auf M ist eine Funktion mit endlichem Träger $D : M \to \mathbb{Z}$. Sei D ein Divisor auf M. Seien $p_1, p_2, \cdots, p_N$ die Punkte des Trägers. Wähle offene Umgebungen U_i von p_i mit $U_i \cap U_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq N$, und lokale Koordinatenfunktionen $z_i : U_i \to \mathbb{C}$ mit $z_i(p_i) = 0$. Sei X die disjunkte Vereinigung von $(M \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_N\} \times \mathbb{C}$ und $U_i \times \mathbb{C}, 1 \leq i \leq N$. Sei X_D die minimale Äquivalenzrelation auf X, die für jedes $p \in U_i.p \neq p_i, 1 \leq i \leq N$ und für jedes $v \in \mathbb{C}$, die Äquivalenz von $(p, v) \in (M \setminus \{p_1, p_2, \cdots, p_N\} \times \mathbb{C}$ mit $(p, z_i(p)^{D(p_i)}v) \in U_i \times \mathbb{C}$ inne hat. Wir setzen $L_D := X/X_D$. Zeige, dass L_D eine holomorphe 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Definiere eine holomorphe Abbildung $\pi_D : L_D \to M$, die als holomorphes Linienbundel über M zu interpretieren ist.

Aufgabe 3. Sei $M = P^1(\mathbb{C})$. Finde Divisoren A, B auf M derart, dass TM und L_A (auch T^*M und L_B) isomorphe Linienbundel sind.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Zeige, dass die Divisoren A, B nicht eindeutig sind.

Aufgabe 5. Sei $M = P^1(\mathbb{C})$. Bestimme die Vektorräume aller holomorphen Schnitten von TM und T^*M.