Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2007

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen.

5. Aufgabenblatt.

Aufgabe 1. Sei V der Vektorraum aller Folgen $a := (a_n))n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}$, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sei $S \subset V$ der Unterraum aller stationnairen Folgen. Sei $|| \,||_S$ eine Norm auf S. Zeige, dass S mit $|| \,||_S$ ausgestattet nicht vollständig ist. Existiert auf V eine Norm, für die V vollständig ist?

Aufgabe 2. Für $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$, sei $(a,b)_t = \sum_{n\in\mathbb{N}}(1+n^{2t})a_n\bar{b_n}$. Zeige, dass $(a,b)_t$ auf S ein Skalarprodukt definiert. Sei S_t die Vervollständigung von S für die Norm zu $(a,b)_t$. Zeige die Inklusion $S_t \subset S_{t'}$ für $t > t'$. Zeige, dass diese Inklusionen kompakt sind.

Aufgabe 3. Sei $E \subset P^2(\mathbb{C})$ die Riemannsche Fläche, die durch die Gleichung $x^3+y^3+z^3 = 0$ gegeben ist. Sei $U_3 \subset P^2(\mathbb{C})$ die Karte $x : y : 1$. Sei $E_3 := E \cap U_3$. Zeige, dass $\omega_3 := \frac{dx\wedge dy}{d(x^3+y^3+1)}$ auf E_3 eine holomorphe 1-Differentialform vom Typus $(1,0)$ definiert. Definiere auf $E\cap U_1$ und auf $E \cap U_2$ Formen ω_1 und ω_2. Definieren die Formen $\omega_i, i = 1,2,3$, auf E eine holomorphe 1-Differentialform vom Typus $(1,0)$?

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Zeige, dass E biholomorph zu $\mathbb{C}/\Gamma_j$ ist, wobei $\Gamma_j := \{a + bj \mid a, b\mathbb{Z}\}$ ist, $j^3 = 1, \mathrm{Im}(j) > 0$. Hinweis: Benutze Symmetrien.

Aufgabe 5. Sei $F \subset P^2(\mathbb{C})$ die Riemannsche Fläche, die durch die Gleichung $x^4+y^4+z^4 = 0$ gegeben ist. Berechne das Geschlecht von F. Beschreibe mittels Karten holomorphe 1-Differentialformen vom Typus $(1,0)$. Finde auf F drei Formen, die linear unabhängig sind.