Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2008

Übungen zur Vorlesung Analysis

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Seien V, W $\mathbb{R}$-Vektorräume endlicher Dimension $n \in \mathbb{N}$ mit Normen $|| \, ||_V, || \, ||_W$. Sei $f : V \to W$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Für $R \in \mathbb{R}, R \geq 0$, und $\delta > 0$ sei

$$\epsilon_{f,R}(\delta) := \mathrm{Sup}_{p,q \in V, ||p||_V \leq R, ||q||_V \leq R, ||p-q||_V \leq \delta} ||(Df)_p - (Df)_q||_{\mathrm{Hom}(V,W)}$$

wobei $|| \, ||_{\mathrm{Hom}(V,W)}$ die Operatornorm ist. Zeige für jedes $R \in \mathbb{R}, R \geq 0$, dass $\lim_{\delta \to 0} \epsilon_{f,R}(\delta) = 0$ gilt.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Zeige für $p, q \in V, ||p||_V \leq R, ||q||_V \leq R$

$$||f(q) - f(p) - (Df)_p(q-p)||_V \leq \epsilon_{f,R}(||q-p||_V)||q-p||_V$$

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Sei $K_{f,R} := \{p \in V \mid ||p||_V \leq R, \mathrm{Rang}((Df)_p) < n\}$. Sei $KW_{f,R} := f(K_{f,R})$. Zeige, dass $KW_{f,R}$ eine Nullmenge in W ist. Sei $K_f := \{p \in V \mid \mathrm{Rang}((Df)_p) < n\}$ und sei $KW_f := f(K_f)$. Zeige, dass KW_f eine Nullmenge in W ist. Hinweis: Es ist von Vorteil auf V mit einer Maximumsnorm $||v||_V := \mathrm{Maximum}|x_i(v)|$ wobei die Funktionen $x_i : V \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen bezüglich einer Basis auf V sind. Man unterteile nun $B(0,R) := \{v \in V \mid ||v||_V \leq R\}$ in $N^{\mathrm{Dim}(V)}$ Teilmengen $B(p_j, R/N), j = 1, 2, \cdots, N^{\mathrm{Dim}(V)}$. Schätze den Inhalt von $f(B(p_j, R/N))$ nach oben scharf ab, vorausgesetzt sei $K_{f,R} \cap B(p_j, R/N) \neq \emptyset$.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Sei $g : V \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $f := dg : V \to V^\star$. Wähle $L \in V^\star$ mit $L \notin KW_{dg}$. Zeige, dass $g - L : V \to \mathbb{R}$ eine Morsefunktion ist. Kann man L beliebig klein in Norm wählen? In welchem Sinne lässt sich die Funktion g durch Morsefunktionen approximieren?

Aufgabe 5. Bestimme ein $s \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(t)^3 + s\sin(t) \in \mathbb{R}$ eine Morsefunktion ist?