Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2008

Übungen zur Vorlesung Analysis

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$ und Koordinatenfunktionen $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Sei ω die n-Differentialform $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Sei β eine $(n-1)$-Differentialform. Zeige, dass ein Vektorfeld X auf V mit $i_X\omega = \beta$ existiert. Ist das Vektorfeld eindeutig?

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Sei $B = (\ ,\ )_V$ das Skalarprodukt auf V wofür die Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$ orthonormiert ist. Wir nehmen an, dass die Dimension n ungerade $n = 3$ ist. Ein Vektorfeld Y zusammen mit dem Skalarprodukt $(\ ,\ )_V$ auf V definieren eine 1-Differentialform α_X auf V. Dazu setze $\alpha_X(Y) = (X, Y)_V$ oder setze $\alpha_X := i_X B$. Sei $X = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. Berechne $d\alpha_X$. Berechne das Vektorfeld R mit $i_R\omega = d\alpha_X$.

Definition: Die Rotation eines Vektorfeldes X auf V, wobei $\mathrm{Dim}(V) = 3$ gilt, ist das Vektorfeld $R = \mathrm{rot}(X) = \mathrm{curl}(X)$ mit $i_R\omega = d\alpha_X$.

Die Rotation eines Vektorfeldes X auf V, wobei $\mathrm{Dim}(V) = 2k+1$ ungerade ist, ist das Vektorfeld $R = \mathrm{rot}(X) = \mathrm{curl}(X)$ auf V mit $i_R\omega = (d\alpha_X)^k$. Hier ist $(d\alpha_X)^k$ das k-fach wedge Produkt $d\alpha_X \wedge \cdots \wedge d\alpha_X$.

Die Rotation eines Vektorfeldes X auf V, wobei $\mathrm{Dim}(V) = 2k$ gerade ist, ist die Funktion $f = \mathrm{rot}(X) = \mathrm{curl}(X)$ auf V mit $f\omega = (d\alpha_X)^k$.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf V. Der Gradient bezüglich dem Skalarprodukt $B = (\ ,\ )_V$ der Funktion f ist das Vektorfeld $G = \mathrm{Grad_B}(f) = \mathrm{Grad}(f)$ mit $\alpha_G = df$ oder mit $i_G B = df$. Zeige: $\mathrm{rot}(\mathrm{Grad}(f)) = 0$.

Aufgabe 4. Seien V, W $\mathbb{R}$-Vektorräume endlicher Dimension. Sei $f : V \to W$ differenzierbar und sei ω eine k-Differentialform auf W. Die Form ω lässt sich wie folgt durch f von W auf V zurück ziehen. Wir notieren die zurückgezogene Form mit $f^*\omega$. Die Definition von $f^*\omega$ ist wie folgt:

$$(f^*\omega)_p(X_1, X_2, \cdots, X_k) := \omega_{f(p)}((Df)_p(X_1), (Df)_p(X_2), \cdots, (Df)_p(X_k))$$

Zeige: $d(f * \omega) = f * d\omega$.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Seien α und β Differentialformen auf W. Zeige: $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$.

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben dürch $f(p) = (x(p)+y(p)+z(p), x(p)y(p)+x(p)z(p) + y(p)z(p), x(p)y(p)z(p))$. Berechne $f^*dx \wedge dy \wedge dz$.