# Übungen zur Vorlesung Analysis
## 3. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1**. Schreibe die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbf{Re} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ mit $p \in \mathbf{C} \mapsto \mathbf{Re}(p) := \frac{p+\bar{p}}{2} \in \mathbf{C}$ als komplexe Linearkombination von einer $\mathbf{C}$-linearen und einer anti-$\mathbf{C}$-linearen Abbildung von $\mathbf{C}$ nach $\mathbf{C}$.

**Aufgabe 2**. Für eine $\mathbf{R}$-lineare Abbildung $L : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sei $L' : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ die Abbildung mit $L'(u) = \frac{L(u)-iL(iu)}{2}$ und sei $L'' : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ die Abbildung mit $L''(u) = \frac{L(u)+iL(iu)}{2}$. Dann gilt die eindeutige Zerlegung $L = L' + L''$ wobei $L'$ $\mathbf{C}$-linear und $L''$ anti-$\mathbf{C}$-linear sind. Für $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ differenzierbar zerlegen wir $df = d'f + d''f$ indem wir für jede Stelle $p \in \mathbf{C}$ das Differential $(Df)_p : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ in $(Df)'_p + (Df)''_p$ zerlegen. Definiere $f := z\bar{z}$ wobei $z : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ die Abbildung mit $z(p) = p, p \in \mathbf{C}$, ist. Berechne $(Df)'_i(i)$.

**Aufgabe 3**. (Fortsetzung). Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ der Weg mit $\gamma(t) = \sin(t) + i\cos(t)$. Berechne das Wegintegral $\int_\gamma d'f$. Untersuche die Frage ob eine differenzierbare Abbildung $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ mit $dg = d'f$ existiert.

**Aufgabe 4**. Sei $F : \bar{D} \to \mathbf{R}$ stetig und harmonisch auf $\bar{D} := \{p \in \mathbf{C} \mid |p| \leq 1\}$ mit $F(\sin(t) + i\cos(t)) = |\cos(t)|, t \in \mathbf{R}$. Berechne $F(\frac{1}{2})$.

**Aufgabe 5**. (Fortsetzung) Untersuche ob auf $D := \{p \in \mathbf{C} \mid |p| < 1\}$ eine differenzierbare Abbildung $G : D \to \mathbf{C}$ mit $dG = d'F$ existiert. Gegebenfalls berechne $G(\frac{1}{2}) - G(0)$.