Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2008

Übungen zur Vorlesung Analysis

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 1-periodische Funktion mit $f(t) = t(1-t)$. Berechne die Fourierreihe von f.

Aufgabe 2. Ist die Folge $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in $[-1, 1]$?

Aufgabe 3. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $g(t) = (t^2 - 1)^2, t \in [-1, 1]$ und $g(t) = 0, |t| > 1$. Bestimme $a \in \mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} ag(t)dt = 1$. Setze $G(t) = ag(t)$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-periodisch und stetig. Zeige, dass die Funktion $G * f$ 1-periodisch und stetig differenzierbar ist. ($*$ ist das Falltungsprodukt.)

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 1-periodisch. Zeige, dass f auf $\mathbb{R}$ gleichmässig stetig ist. Für $n \in \mathbb{N}$, setze $G_n(t) = nG(nt)$. Zeige, dass die Folge von 1 periodische und stetig differenzierbaren Funktionen $(G_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmässig auf $\mathbb{R}$ zu f konvergiert. Hinweis:

$$|f(t) - G_n * f(t)| \leq \text{Maximum}_{u,v\in\mathbb{R},|u-v|\leq 1/n} |f(u) - f(v)|$$

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 1-periodisch. Zeige, dass die Folge der Fourierkoeffizienten von f eine Nullfolge ist.

Aufgabe 6. Ist die Folge $(\sin(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ die Folge der Fourierkoeffizienten einer (verallgemeinerten) Funktion?