Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

5. Aufgabenblatt, MECHANIK

Aufgabe 1. Wir möchten im reellen Vektorraum V der Dimension 3 Bewegungen von Massenpunkten beschreiben. Wir postulieren, dass eine Punktmasse M mit Masse $m \in \mathbb{R}$ an der Stelle $p \in V$, deren Geschwindigkeit $v \in V$ beträgt, ein kinetische Energie $E(p, v, m) \in \mathbb{R}$ inne hat. Wir nehmen an:

(i) $E(p, v, m)$ hängt nicht von der Stelle p ab. Daher schreiben wir $E(v, m)$,

(ii) $E(p, v, m)$ ist proportional zu m. Daher schreiben wir $E(v, m) = mE(v)$. Also ist $E(v)$ die kinetische Energie, die eine Einheitsmasse mit Geschwindigkeit m inne hat,

(iii) Es gilt $E(v) > 0, v \neq 0$,

(iv) Die Zuordnung $v \in V \mapsto E(v) \in R$ ist differenzierbar und das Differential $(DE)_v$ von E an der Stelle $v \in V$ ist durch $(DE)_v(h) = E(v + h) - E(v) - E(h), h \in V$ gegeben.

Zeige, dass $(u, v)_E := E(u+v) - E(u) - E(v)$ ein Skalarprodukt auf V definiert. Wir nennen $(u, v)_E$ das kinetische Skalarprodukt von V. Ausgestattet mit dem Skalarprodukt $(u, v)_E$ ist V ein Euklidischer Vektorraum.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Ein kanonischer Isomorphismus der Räume V und V^* lässt sich aus dem Skalarprodukt $(u, v)_E$ auf V gewinnen. Sei nämlich $\sigma : V \to V^*, v \in V \mapsto \sigma_v \in V^*$ die Abbildung, wobei für $u \in V$ gilt $\sigma_v(u) := (v, u)_E$ gilt. Zeige, dass σ ein Isomorphismus von Vektorräume ist. Sei $\tau : V^* \to V$ die Umkehrung von σ.

Aufgabe 3. Sei V ein reeller Vektorraum endlicherer Dimension. Sei $W := V \times V^*$. Wir schreiben ein Element aus W als (u, L) wobei $u \in V$ und $L \in V^*$ ist. Zeige, dass $\omega : W \to \Lambda^2(W), p \in W \mapsto \omega_p \in \Lambda^2(W)$ mit $\omega_p((u, L), (u', L')) := L(u') - L'(u) \in \mathbb{R}$ eine 2-Differentialform ist. Sei $e_1, e_2, \cdots, e_n$ eine Basis für V, seien $x_1, x_2, \cdots, x_n$ die Koordinatenfunktionen zu dieser Basis. Dann bilden $x_1, x_2, \cdots, x_n$ eine Basis für V^*. Seien $y_1, y_2, \cdots, y_n$ die Koordinatenfunktionen auf V^*. Erweitere die Funktion x_i auf W mit $x_i((u, L)) := x_i(u)$ auf W. Erweitere die Funktion y_i auf W mit $y_i((u, L)) := y_i(L)$ auf W. Dann sind die Funktionen $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ die Koordinatenfunktionen auf W zu einer Basis. Schreibe ω mittels Dachprodukte von dx_i, dy_j.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Sei X ein Vektorfeld auf W. Dann definieren wir wie folgt durch Einsetzen eine 1-Differentialform $i_X\omega$ auf W. Für $p \in W$ und $w \in W$ setzen wir $(i_X\omega)_p(w) := \omega_p(X_p, w)$. Zeige, dass für jede 1-Differentialform α auf W eindeutig ein Vektorfeld X auf W existiert derart, dass $\alpha = i_X\omega$ gilt.

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Sei H eine Differenzierbare Funktion auf W. Zeige, dass eindeutig ein Vektorfeld X auf W existiert derart, dass

$$dH = i_X \omega$$

gilt. Das Vektorfeld X heisst ω-gradient von H. Wir notieren $X = \mathrm{Grad}_\omega(H)$. Berechne $L_X(H)$.

Aufgabe 6. (Fortsetzung der Aufgaben $1, 4, 5$). Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension 3. Sei $(u,v)_E$ das Skalarprodukt, welches durch die kinetische Energie gegeben ist. Sei $W_E := V \times V$. Dann ist $\mathrm{Id}_V \times \tau : W_E \to W$ ein Isomorphismus von Vektorräume. Sei ω_E die 2-Differentialform auf W_E, die der Form ω auf W entspricht, d.h $\omega_E := (\mathrm{Id}_V \times \tau)^* \omega$. Sei H_E auf W_E die Funktion $H \circ (\mathrm{Id}_V \times \tau)$. Sei X_E der ω_E-Gradient von H_E. Eine Punktmasse mit Masse M beschreibt eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to V$. Dazu betrachten wir zwei Hilfskurven:

$$\Gamma_E : \mathbb{R} \to W_E, t \in \mathbb{R} \mapsto (\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t)) \in W_E,$$

und

$$\Gamma : \mathbb{R} \to W, t \in \mathbb{R} \mapsto (\gamma(t), \tau(\frac{d}{dt}\gamma(t))) \in W$$

Das Hauptgesetz der Mechanik lässt sich nun wie folgt formulieren:

Die Kurve Γ *ist Integralkurve des Vektorfeldes* $\mathrm{Grad}_\omega(H)$

oder

Die Kurve Γ_E *ist Integralkurve des Vektorfeldes* $\mathrm{Grad}_{\omega_E}(H_E)$

Aufgabe 7. (Beispiel). $V = \mathbb{R}^3$ mit KoordinatenFunktionen x_1, x_2, x_3 zu der Basis $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ und seien die Koordinatenfunktionen y_1, y_2, y_3 zu der Basis x_1, x_2, x_3 auf V^* . Wir nehmen an, dass das Skalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^3$ bereits das kinetische Skalarprodukt ist. Also gilt $(u,v)_{\mathbb{R}^3} = (u,v)_E = x_1(u)x_1(v) + x_2(u)x_2(v) + x_3(u)x_3(v)$. Sei

$$H(p,q) = m(gx_3(p) + \frac{1}{2}(y_1(q)^2 + y_2(q)^2 + y_3(q)^2))$$

Zeige, dass die Integralkurven Γ des ω-gradienten X von H die Bewegung eines Massenpunktes M mit Masse m im Gravitationsfeld $-g\frac{\partial}{\partial x_3}$ beschreiben. Die Funktion H_E stellt die Energie da, hier die Summe der potentielle Energie $mgx_3(p)$ und kinetische Energie $\frac{m}{2}(x_1(\tau(q))^2 + x_2(\tau(q))^2 + x_3(\tau(q))^2)$. Bedenke, dass hier $y_i(q) = x_i(\tau(q))$ gilt.