Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei V ein Euklidischer Vektorraum der Dimension 3 mit orthonormieter Basis e_1, e_2, e_3, und Koordinatenfunktionen $x, y, z : V \to \mathbb{R}$. Das Skalarprodukt $(u, v)_V$ von Vektoren $u, v \in V$ ist also durch $(u, v)_V = x(u)x(v) + y(u)y(v) + z(u)z(v)$ gegeben. Zu $u \in V$ sei $A_u : V \to V$ die lineare Abbildung mit $A_u(v) = (z(u)y(v) - y(u)z(v))e_1 + (-z(u)x(v) + x(u)z(v))e_2 + (y(u)x(v) - x(u)yv)e_3$. Schreibe die Matrix für A_u bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3. Zeige, dass u im Kern von A_u ist und dass das Bild von A_u der Orthogonalraum des Kernes von A_u ist.

Aufgabe 2. (Fortsetzung) Betrachte A_u als Vektorfeld auf V. Beschreibe geometrisch die Integralkurven des Vektorfeldes A_u.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Für $u, v \in V$ berechne die Liesche Klammer der Vektorfelder A_u, A_v. Zeige $[A_u, A_v]_{\text{Lie}} = A_w$ mit $w \in V$. Definiere das Vektorprudukt $u \times v$ derart, dass $[A_u, A_v]_{\text{Lie}} = A_{u \times v}$ gilt.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Gilt für das Vektorprodukt auf V eine Identität?

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Sei $u \in V$. Seien $a, b : \mathbb{R} \to V$ Integralkurven für A_u. Zeige, dass $t \in \mathbb{R} \mapsto (a(t), b(t))_V \in \mathbb{R}$ konstant ist. Schliesse, dass $\exp(A_u)$ eine Isometrie von V ist.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Zeige, dass jede orientierungserhaltende, lineare Isometrie ϕ von V sich als $\phi = \exp(A_u), u \in V, (u, u)_V \leq \pi$, schreiben lässt.

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Ist diese Schreibweise für $\phi \in \mathrm{SO}(V)$ eindeutig?

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Zeige, dass die Gruppe $\mathrm{SO}(V) = \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ und der projektive Raum $P(V \times \mathbb{R}) = P^3(\mathbb{R})$ diffeomorph sind.

Aufgabe 9. (Fortsetzung). Vier metallische Bälle, star mit sechs Stangen verbunden fliegen im Raum. Beschreibe die Bewegung mit einer Kurve $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^3 \times P^3(\mathbb{R})$ oder mit einer Kurve $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Aufgabe 10. (Fortsetzung). Sei $\gamma : [0, T] \to \mathrm{SO}(V)$ eine differenzierbare Kurve. Dann ist die Ableitung $\dot{\gamma}(t)$ bezüglich der orthonormierte Basis e_1, e_2, e_3 eine reelle 3×3-Matrix. Zeige, dass $\gamma(t)^{-1}\dot{\gamma}(t)$ sich eindeutig als $A_u, u \in V$, darstellen lässt. Hinweis: studiere vorerst ein $ts \in [0, T]$ mit $\gamma(s) = \mathrm{Id}_V$. Leite $(\gamma(s)(e_1), e_1)_V$ an der Stelle s ab. Es gilt: $(\gamma(t)(e_1), e_1)_V \leq 1, t \in [0, T]$, und $(\gamma(s)(e_1), e_1)_V \leq 1$.