Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

9. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $V := C^0_{1-\text{periodisch}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, die 1-periodisch sind. Wir statten V mit der Maximumsnorm $||?||_V$ aus. Für $s \in \mathbb{R}, s > 0$, sei $Y_s : V \to V$ die lineare Abbildung $f \in V \mapsto Y_s(f) \in V$, wobei für $t \in \mathbb{R}$ gilt $Y_s(f)(t) = \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} f(t+\tau)d\tau$. Berechne die Operator die Operatornorm von Y_s und von $\mathrm{Id}_V - Y_s$.

Aufgabe 2. Zeige, dass für jedes $f \in V$ gilt:

$$\lim_{s\to 0, s>0} \frac{1}{s}(\mathrm{Id}_V - Y_s)(f) = 0$$

Gilt folgendes nicht oder doch?

$$\lim_{s\to 0, s>0} \frac{1}{s}(\mathrm{Id}_V - Y_s) = 0$$

Aufgabe 3. Sei $f \in V$ stetig differenzierbar. Zeige:

$$\lim_{s\to 0, s>0} \frac{1}{s^2}(\mathrm{Id}_V - Y_s)(f) = 0$$

Aufgabe 4. Sei $f \in V$ zweimal stetig differenzierbar. Zeige:

$$\lim_{s\to 0, s>0} \frac{1}{s^3}(\mathrm{Id}_V - Y_s)(f) - \frac{1}{3}f'' = 0$$

Aufgabe 5. Bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wofür ein zweimal stetig differenzierbare Funktion $f \in V, f \neq 0$ mit $f'' = \lambda f$ existiert.

Aufgabe 6. Sei $s \in \mathbb{R}, s > 0$. Bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wofür ein zweimal stetig differenzierbare Funktion $f \in V, f \neq 0$ mit $Y_s(f) = \lambda f$ existiert.

Aufgabe 7. Sei $f \in V$ mit $Y_s(f) = \lambda f$ für ein $s \in \mathbb{R}, s > 0$, und ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f beliebig oft differenzierbar ist.

Aufgabe 8. Seien k_1, K_2 kompakte, konvexe Teilmengen in $\mathbb{R}^2$. Wir nehmen an, dass die Ränder von K_1, K_2 beliebig oft differenzierbaren Kurven sind. Hat $K_1 \setminus K_2$ endlich viele Zusammenhangskomponenten?