Prof. N. A'Campo Wintersemester 2006/07

Übungen zur Vorlesung Analysis

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Die Ebenen $E_n := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid x(p) = 1/n\}, n = 1, 2, 3 \cdots$, werden aus $\mathbb{R}^3$ entfernt. Das Komplement ist nicht zusammenhängend. Wir bohren in jeder Ebene E_n ein Loch an der Stelle p_n, d.h. wir entfernen aus E_n die Teilmenge $\{p \in E_n \mid (y(p) - y(p_n))^2 + (z(p) - z(p_n))^2 < 1\}$. Das Komplement der Vereinigung der gelochten Ebenen bildet einen Filter S_P, der von der Wahl der Lochzentren $P = (p_1, p_2, \cdots)$ abhängt. Wir fragen nach der Anzahl Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten von S_P. Diese Frage wird für die folgenden Fälle gestelt:
- die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in $\mathbb{R}^3$ konvergent,
- die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent, hat aber genau einen Häufungspunkt,
- es gilt $p_n = (1/n, 0, (-1)^n a)$ mit $0 < a < 1$ oder $a = 1$ oder $a > 1$,
- die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat in $\mathbb{R}^3$ keinen Häufungspunkt,
- es gilt $p_n = (1/n, 0, \pm 1)$,
- mit dem Kopf- oder Zahlverfahren wird $p_n = (1/n, 0, \pm 1)$ gewählt,
- es gilt $p_{n+1} - p_n = (1/n + 1 - 1/n, 0, \pm 2)$, und $z(p_{n+1}) - z(p_n)$ nimmt mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte ± 2 an,
- es gilt $p_{n+1} - p_n = (1/n+1-1/n, \pm 2, \pm 2)$ und $(y(p_{n+1}) - y(p_n), z(p_{n+1}) - z(p_n))$ nimmt mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte $(\pm 2, \pm 2)$ an.

Aufgabe 2. Sei V ein reeller Vektorraum mit endlicher Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Seien $x_1, x_2, \cdots, x_n : V \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktion zu der gegebenen Basis. Die Funktionen $x_i, 1 \leq i \leq n$ sind durch die Identität: $p = x_1(p)e_1 + x_2(p)e_2 + \cdots + x_n(p)e_n,\ p \in V$ definiert. Sei $V_\mathbb{Q} := \{p \in V \mid x_i(p) \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq n\}$. Zeige, dass $V_\mathbb{Q}$ ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum der Dimension n in V ist. Konstruiere in V ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum der Dimension $n + 1$.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Die Euklidische Norm bezüglich der gegebenen Basis von $p \in V$ ist $||p||_{\text{Eukl}} := \sqrt{x_1(p)^2 + x_2(p)^2 + \cdots + x_n(p)^2}$. Wir notieren für $p \in V, r \in \mathbb{R}, r \geq 0$, mit $b^V_{\text{Eukl}}(p, r) := \{q \in V \mid ||p - q||_{\text{Eukl}} < r\}$, die sogenannte offene Euklidische Kugel in V mit Zentrum p und Radius r. Eine Teilmenge $U \subset V$ heisst offen in V wenn für alle $p \in U$ ein $r \in \mathbb{R}, r > 0$, existiert derart, dass $b^V_{\text{Eukl}}(p, r) \subset U$ gilt. Die Menge aller offenen Teilmengen in V ist die Topologie Top_V zu der Norm $p \in V \mapsto ||p||_{\text{Eukl}}$ des Vektorraumes V. Zeige, dass die Topologie des Vektorraumes V nicht von der hier gewählten Norm $||\,||_V$ auf V abhängt.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Wir nehmen an dass die Dimension von V nicht 0 ist. Konstruiere eine injektive Abbildung $\mathbb{R} \to \text{Top}_V$. Konstruiere eine injektive Abbildung $\text{Top}_V \to \mathbb{R}$. Schliesse, dass die Mächtigkeit von Top_V nicht die Mächtigkeit der Potenzmenge von V ist.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Sei $U \subset V$ eine offene Teilmenge in V. Eine reelle Funktion f auf U ist eine Zuordnung $p \in U \mapsto f(p) \in \mathbb{R}$. Ein Vektorfeld X auf

U ist eine Zuordnung $p \in U \mapsto X_p \in V$. Eine 1-Differentialform ω auf U ist eine Zuordnung $p \in U \mapsto \omega_p \in V^*$. Hier ist V^* der Dualraum zu V, d.h. V^* ist der Raum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{R}$.
Beispiele:
– Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf U. Dann ist die Zuordnung $df : U \to V^*$, die einem Punkt $p \in U$ das Differential $(Df)_p : V \to \mathbb{R}$ zuordnet, eine 1-Differentialform auf U. Die Funktion f ist stetig differenzierbar, wenn df stetig ist.
– Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf U und sei $X : U \to V$ ein Vektorfeld auf U. Dann ist die Zuordnung $p \in V \mapsto (Df)_p(X_p) \in \mathbb{R}$ eine Funktion auf U. Wir notieren diese Funktion mit $L_X f$. Die Funktion $L_X f$ heisst die Lie'sche Ableitung von f nach X.
– Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf U und sei $X : U \to V$ das Vektorfeld $p \in U \mapsto e_1 \in V$. Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ist $L_X f$.
– Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf U und seien $X, Y : U \to V$ die Vektorfeldern $p \in V \mapsto X_p := e_1 \in V, Y_p := (1 + x_1(p))e_2 \in V$. Gilt nun $L_X L_Y f = L_Y L_X f$?
– Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf U und seien $X, Y : U \to V$ die Vektorfeldern $p \in V \mapsto X_p := e_1 \in V, Y_p := (1 + x_1(p))e_2 \in V$. Konstuiere ein Vektorfeld Z auf U derart, dass für alle 2-mal differenzierbaren Funktionen f auf U gilt: $L_X L_Y f - L_Y L_X f = L_Z f$.
– Gebe eine stetige 1-Differentialform ω auf ein Vektorraum V derart, dass für alle differenzierbaren Funktionen gilt: $df \neq \omega$.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Sei $p \in V$ eine Stelle. Eine Kiste K um p ist durch ein Tripel (E, F, r) gegeben, wobei $r \in \mathbb{R}, r > 0$, und E, F Untervektorräume in V sind, die eine Zerlegung in direkten Summe $V = E + F$ mit Projektionen $\pi_E : V \to V$ und $\pi_F : V \to F$ bestimmen. Die Kiste K ist nun $K := \{p+h \mid h \in V, ||\pi_E(h)||_V < r, ||\pi_F(h)||_V < r\}$. Wir setzen $K_E := \{p + h \in K \mid \pi_F(h) = 0\}$ und $K_F := \{p + h \in K \mid \pi_E(h) = 0\}$. Die Zuordnung $(u, v) \in K_E \times K_F \mapsto p + u + v \in K$ identifiziert K mit dem Produkt der Mengen K_E und K_F. Eine Teilmenge $M \subset V$ ist differenzierbare Untermanigfaltigkeit in V, wenn für alle $p \in M$ eine Kiste K um p existiert derart, dass der Durchschnitt $M \cap K$ der Graph einer differenzierbaren Abbildung von K_E nach K_F ist. Zeige, dass jede offene oder endliche Teilmenge in V eine Untermannigfaltigkeit ist. Hinweis: Baue Kisten mit $\mathrm{Dim}(E) = 0$ oder $= \mathrm{Dim}(V)$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung derart, dass für alle $p \in U$ mit $f(p) = 0$ das Differential $(Df)_p : V \to \mathbb{R}$ nicht 0 ist. Zeige, dass $M := \{p \in U \mid f(p) = 0\}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit in V ist. Hinweis: Für $p \in M$ wähle $E = \mathrm{Kern}((Df)_p)$. Wende den Satz über impliziet definierten Funktionen an.

Aufgabe 7. Zeige, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ Untermannigfaltigkeiten in $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ sind.

Aufgabe 8. Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und injektiv derart, dass für alle $p \in \mathbb{R}^2$ das Differential $(D\phi)_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Isomorphismus ist. Zeige $\phi(\{p \in \mathbb{R}^2 \mid x(p) \geq 0 \,\mathrm{UND}\, y(p) \geq 0\}) \neq \{p \in \mathbb{R}^2 \mid x(p) \geq 0 \,\mathrm{ODER}\, y(p) \geq 0\}$.