Prof. N. A'Campo Frühlingssemester 2009

Übungen zur Vorlesung Optimierung und Geometrie II

2. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei ω eine holomorphe 2-Differentialform auf $\mathbb{C}^2$. Für $p \in \mathbb{C}^2$ mit $(df)_p \neq 0$ konstruire lokal um p auf $\mathbb{C}^2$ eine holomorphe 1-Differentialform α mit $\omega = \alpha \wedge df$. Ist α eindeutig?

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Zeige, dass die Einschränkung von α auf $\{q \in U \mid f(q) = f(p)$, wobei U eine hinreichend kleine offene Umgebung von p in $\mathbb{C}^2$, eindeutig ist. Wir notieren diese Einschränkung mit α_t, wobei $t = f(p)$ ist, und schreiben $\alpha_t = (\omega/df)_t$.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer isolierten Singularität an der Stelle $0 \in \mathbb{C}^2$. Sei $F := F_{\epsilon,\eta} := \{q \in \mathbb{C}^2 \mid ||q|| < \epsilon \& f(q) = \eta\}$, wobei $0 < \eta << \epsilon$ hinreichend klein sind. Konstruire für jede holomorphe Funktion $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ auf F eine holomorphe 1-Differentialform. Hinweis: setze $\omega := g dz_0 \wedge dz_1$ und erhalte $(g dz_0 \wedge dz_1/df)_\eta$.

Aufgabe 4. Bestimme den Kern der Abbildung $g \mapsto (g dz_0 \wedge dz_1/df)_\eta$.