Übungen zur Vorlesung Geometrie

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $X := \{(p,q) \in S^1 \times S^1 \mid p \neq q\}$ und sei $Y := \{P \subset S^1 \mid \#P = 2\}$. Sei $\phi : X \to Y$ die Abbildung $\phi((p,q)) = \{p,q\}$. Zeige, dass ϕ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 2. Sei X die Vereinigung der Kanten eines Quaders. Sei Y die Vereinigung der Kanten eines Tetraeders. Konstruiere eine Überlagerung $\pi : X \to Y$.

Aufgabe 3. Sei Z die Vereinigung der Kanten eines Oktaeders. Zeige, dass keine Überlagerung $\pi : Z \to Y$ existiert. Ablenkung: Oktaeder und Kubus sind duale Körper, das Tetraeder ist autodual!

Aufgabe 4. (Fortsetzung: Y wie in Aufgabe 2, Z wie in Aufgabe 3). Sei $\phi : Z' \to Z$ eine Überlagerung. Zeige, dass keine Überlagerung $\pi : Z' \to Y$ existiert.

Aufgabe 5. Sei $\phi : X \to Y$ eine Überlagerung und sei $\gamma : [0,1] \to Y$ eine stetige Kurve in Y. Sei $p \in X$ mit $\pi(p) = \gamma(0)$. Zeige, dass eindeutig eine stetige Kurve $\Gamma_p : [0,1] \to X$ mit $\Gamma_p(0) = p$ und $\pi \circ \Gamma_p = \gamma$ existiert.

Aufgabe 6. Sei $\phi : X \to Y$ eine Überlagerung und sei $\gamma : [0,1] \to Y$ eine stetige Kurve in Y. Konstruiere eine Bijektion $T_\gamma : \pi^{-1}(\gamma(0)) \to \pi^{-1}(\gamma(1))$. Hinweis: für $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ setze $T_\gamma(p) = \Gamma_p(1)$.

Aufgabe 7. Zeige, dass die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ eine Überlagerung ist. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ die Kurve $\gamma_k(t) = \cos(2\pi kt) + i\sin(2\pi kt)$. Berechne die Bijektion $T_{\gamma_k} : 2\pi\mathbb{Z} \to 2\pi\mathbb{Z}$ der Aufgabe 6. Hinweis: $2\pi\mathbb{Z} = \exp^{-1}(1)$.

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ eine stetige Kurve. Definiere das Wegintegral $\int_\gamma \frac{dz}{z}$. Interpretiere das Wegintegral als $T_\gamma : \exp^{-1}(\gamma(0)) \to \exp^{-1}(\gamma(1))$.