

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie
8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $\times : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt. Sei $\text{LieSO}(3)$ die LieAlgebra der Gruppe $\text{SO}(3)$. Zeige, dass die Algebren (\mathbb{R}^3, \times) und $\text{LieSO}(3)$ isomorph sind.

Aufgabe 2. Sei G eine Liesche Gruppe und sei $\text{Lie}G$ die Lie Algebra von G . Sei $\exp^G : \text{Lie}G \rightarrow G$ die Exponentialabbildung. Berechne das Differential von \exp^G an der Stelle $e \in G$. Definiere eine lokale Umkehrabbildung $\log^G : U \rightarrow \text{Lie}G$, wobei U eine offene Umgebung von e in G ist.

Aufgabe 3. Sei $K : G \times G \rightarrow G$ die Abbildung $(a, b) \in G \times G \mapsto aba^{-1}b^{-1} \in G$. Berechne $(DK)_e$.

Aufgabe 4. Berechne die 4-Gliedentwicklung von $\log^G \circ K$ an der Stelle (e, e) in $G \times G$. Zeige, dass das dritte Glied $\frac{1}{4}$ von der LieKlammer in $\text{Lie}G$ ist. Schliesse, dass die Definitionen der LieKlammer mit recht- oder links-invarianten Vektorfeldern übereinstimmen.

Aufgabe 5. Sei $e_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n$ die Basis der LieAlgebra von $\text{SO}(n)$, wobei $e_{i,j}$ die schiefsymmetrische $(n \times n)$ -Matrix mit zwei Einträge $\neq 0$ und mit $e_{i,j}[i, j] = 1$ ist. Definiere eine rechts- wie links-invariante Riemannsche Metrik auf $\text{SO}(n)$. Berechne den Levi-Civita Zusammenhang ∇ . Berechne die Krümmung.