Prof. N. A'Campo Lenzsemester 2007

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $S(n,\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen symmetrischen $n\times n$ Matrizen. Sei $P(n,\mathbb{R}) \subset S(n,\mathbb{R})$ die Teilmenge der positiven symmetrischen Matrizen. Ein $S \in S(n,\mathbb{R})$ heisst positiv, wenn für alle $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$, gilt $(Su,u)_{\mathbb{R}^n} > 0$. Zeige, dass die Abbildung $\phi : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to P(n,\mathbb{R}), g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mapsto g\,{}^t g \in P(n,\mathbb{R})$ surjektiv ist. Identifiziere via ϕ die Räume $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ und $P(n,\mathbb{R})$. Identifiziere $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ mit $P_1(n,\mathbb{R}) := \{P \in P(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Det}(P) = 1$. Zeige, dass die Exponentialabbildung ein Diffeomorphismus $\exp : S(n,\mathbb{R}) \to P(n,\mathbb{R})$ ist. Bestimme $\exp^{-1}(P_1(n,\mathbb{R}))$.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Konstruiere für $P \in P_1(n,\mathbb{R})$ eindeutig ein $S \in P(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ mit $\phi(S) = P$. Wir notieren $\rho(P) := S$. Zeige, dass die Abbildung $\rho : P_1(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Sei ϕ_1 die Einschränkung von ϕ auf $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Sei $B := \mathrm{Bild}(\rho\circ\phi_1)$. Zeige $B = P_1(n,\mathbb{R})$. Zeige, dass die Abbildung $m : \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \times P_1(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, die durch das Gruppengesetz in $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ gegeben ist, eine differenzierbare Bijektion ist.

Aufgabe 4. Die Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ wirkt mit $(g,P) \mapsto gP^t g$ auf $P(n,\mathbb{R})$. Der Tangentialraum $TP(n,\mathbb{R})$ ist $P(n,\mathbb{R}) \times S(n,\mathbb{R})$ da $P(n,\mathbb{R})$ offen im Vektorraum $S(n,\mathbb{R})$ ist. Wir definieren an der Stelle $P \in P(n,\mathbb{R})$ das Skalarprodukt $B_P(u,v) := \mathrm{Spur}(P^{-1}uP^{-1}v), u,v \in S(n,\mathbb{R})$. Zeige, dass B auf $P(n,\mathbb{R})$ eine $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-invariante Riemannsche Metrik definiert. Wir notieren weiter auch mit B die auf $P_1(n,\mathbb{R})$ induzierte $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$-invariante Riemannsche Metrik.

Aufgabe 5. Zeige, das die 2-Sphäre S^2 nicht diffeomorph zu einer Liesche Gruppe ist. Hinweis: Könnte S^2 ein Liesches Gruppengesetz tragen, dann hätte S^2 ein Vektorfeld ohne Nullstellen.

Aufgabe 6. Sei G eine kompakte zusammenhängende Abelsche Liesche Gruppe. Zeige, dass G diffeomorph zu einem Produkt $S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ ist. Hinweis: Die Exponentialabbildung $\exp_{\mathrm{G}} : T_eG \to G$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Die Exponentialabbildung $\exp_{\mathrm{G}} : T_eG \to G$ ist wie folgt definiert: für $v \in T_eG$ sei V das linksinvariante Vektorfeld auf G mit $V_e = v$. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to G$ die Lösung der Differentialgleichung zu V mit $\gamma(0) = e$. Setze $\exp_{\mathrm{G}}(v) := \gamma(1)$.

Aufgabe 7. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sie $m : V \times V \to V$ eine lineare Abbildung derart, dass $(V,+,m)$ ein (kommutativer) Körper ist. Für $v \in V$ sei $M_v : V \to V$ die Abbildung $u \in V \mapsto m(u,v) \in V$. Zeige, dass $G := \{v \in V \mid \mathrm{Determinante}(L_v) = 1$ mit m als Gruppengesetz eine Abelsche Liesche Gruppe ist.

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Zeige, dass G kompakt ist. Zeige, dass G diffeomorph zu einer Sphäre ist. Schliesse, dass $\mathrm{Dim}(V) \leq 2$ gilt.