Prof. N. A'Campo Lenzsemester 2007

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine beliebig oft differenzierbare Kurve. Seien $a(t) = x(\gamma(t)), b(t) = y(\gamma(t))$. Wir statten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt aus. Zeige, dass die Krümmung von *gamma* an der Stelle $\gamma(t)$ gleich

$$\frac{a'(t)b''(t) - b'(t)a''(t)}{(a'(t)^2 + b'(t)^2)^{3/2}}$$

ist.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Der Ausdruck für die Krümmung wechselt das Vorzeichen bei einer Änderung der Orientierung von γ und von $\mathbb{R}^2$. Bestimme das Zentrum des Krümmungskreises.

Aufgabe 3. Berechne die Krümmung der Kurve $\gamma(t) = (t, t^2)$.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Zeichne mit einer sehr grosse Auflösung den Kurvenabschnitt für $t \in [1/2, 3/2]$ und die Krümmungskreise an den Stellem $\gamma(1/2 + s/10), s = 0, 1, \cdots, 10$.

Aufgabe 5. Sei γ die Raumkurve $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. Bestimme die Kurve des Zentrums $c(t)$ des Krümmungskreises an der Stelle $\gamma(t)$.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Kann man aus $c(t)$ die Kurve $\gamma(t)$ rekonstruieren?

Aufgabe 7. Sei $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträge. Sei $P(n, \mathbb{R})$ der Raum aller positiven symmetrischen reellen Matrizen. Zeige, dass $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n^2}$ ist. Zeige, dass eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ ist. Sei $\pi : \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \to P(n, \mathbb{R})$ die Abbildung $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \mapsto g\,{}^t g \in P(n, \mathbb{R})$. Zeige, dass π differenzierbar ist. Berechne an der Stelle $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ das Differential von π. Berechne für $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ das Niveau durch g von π. Begründe: $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = P(n, R)$.