Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei E^3 der Euklidische 3-dimensionale Raum. Wir stellen uns E als $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinatenfunktionen x, y, z und mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet vor. Sei $T \subset E^3$ die Menge aller Punkte $p \in E^3$ mit Abstand 1 zu einem Kreis vom Radius 2. Parametriziere T mittels einer differenzierbare doppelt-periodischer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to T$. Ist T eine Untermannigfaltigkeit in E^3? Beschreibe die Tangentialvektoren an T. Beschreibe die von E^3 auf T induzierte Riemannsche Metrik.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Berechne die Gausssche Krümmung von T.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Kann man die doppelt-periodische Parametrizierung $f : \mathbb{R}^2 \to T$ so wählen, dass f lokal eine Riemannsche Isometrie von E^2 nach T darstellt?

Aufgabe 4. Sei $H \subset E$ die Fläche $H := \{p \in E \mid x(p)^2 + y(p)^2 - z(p)^2 = -1\}$. Berechne die Gausssche Krümmung von H für die von E auf H induzierte Riemannsche Metrik.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Bestimme die Isometriegruppe von H und T.

Aufgabe 6. Sei $H \subset E$ die Fläche $H := \{p \in E \mid x(p)^2 + y(p)^2 - z(p)^2 = -1\}$. Zeige, dass die quadratische Form $p \in E = \mathbb{R}^3 \mapsto x(p)^2 + y(p)^2 - z(p)^2 \in \mathbb{R}$ auf H eine Riemannsche Metrik$B$ induziert. Berechne die Gausssche Krümmung auf (H, B).

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Bestimme die Isometriegruppe von (H, B).

Aufgabe 8. Sei $H_+ \subset E$ die Fläche $H_+ := \{p \in E \mid x(p)^2 + y(p)^2 - z(p)^2 = +1\}$. Induziert die quadratische Form $p \in E = \mathbb{R}^3 \mapsto x(p)^2 + y(p)^2 - z(p)^2 \in \mathbb{R}$ auf H_+ eine Riemannsche Metrik? Ist die auf H_+ induzierte quadratische Form entartet? Hat die auf H_+ induzierte quadratische Form einen Levi-Civita Zusammenhang?