Prof. N. A'Campo Lenzsemester 2007

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $B : U \to \mathrm{Sym}^2_+(\mathbb{R}^2)$ eine differenzierbare Riemannsche Metrik auf U. Zeige, dass zwei differenzierbare Vektorfelder $e_1, e_2 : U \to \mathbb{R}^2$ existieren derart, dass punktweise die Vektoren $e_{1,p}, e_{2,p} \in \mathbb{R}^2$ eine B_p-orthonormierte Basis bilden, inU.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Sei $K \in \Omega^2(U, \mathrm{End}(\mathbb{R}^2))$ die Krümmung des Levi-Civita Zusammenhangs für B auf U. Zeige, dass eine Funktion $k : U \to \mathbb{R}$ existiert, derart dass für alle $p \in U$ gilt:

$$K_p(e_{1,p}, e_{2,p})(e_{1,p}) = k(p)e_{2,p}$$

$$K_p(e_{1,p}, e_{2,p})(e_{2,p}) = -k(p)e_{1,p}$$

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Zeige, dass die Funktion $k : U \to \mathbb{R}$ nicht von den punktweise orthonormierten Vektorfeldern $e_{2,p})(e_{1,p}$ abhängt. Die Funktion $k : U \to \mathbb{R}$ heisst Gausssche Krümmung der Fläche (U, B).

Aufgabe 4. Sei B die Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}^2$, die in Aufgabe 3, Blatt 1 definiert ist. Berechne die Gausssche Krümmung.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Bestimme die Isometriegruppe von $(\mathbb{R}^2, B)$.