Prof. N. A'Campo  Lenzsemester 2007

# Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie

2. Aufgabenblatt

**Aufgabe 1**. Sei $U \subset V$ eine offene Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes endlicher Dimension. Sei $W$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension. Eine Kovariante Ableitung auf $\Omega^0(U, W)$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\nabla : \Omega^0(U, W) \to \Omega^1(U, W)$$

welcher die Leibnitz-Koszul Eigenschaft hat: für $f \in \Omega^0(U, \mathbb{R})$ und $s \in \Omega^0(U, W)$ gilt

$$\nabla(fs) = df\, s + f\nabla(s)$$

Wir notieren für $p \in U, s \in \Omega^0(U, W), X \in \Omega^0(U, V)$ mit $\nabla_X(s)$ die $W$-wertige Funktion auf $U$, die durch Einsetzen des Vektorfeldes $X$ in der $W$-wertige 1-Differentialform $\nabla(s)$ entsteht: Also $\nabla_X(s) = i_X\nabla(s) \in \Omega^0(U, W)$. Der Wert von $\nabla_X(s)$ an der Stelle $p$ wird mit $\nabla_X(s)(p)$ notiert. Die Leibnitz-Koszul Eigenschaft in dieser Notation ist:

$$\nabla_X(fs)(p) = (df)_p(X)\, s(p) + f(p)\nabla_X(s)(p)$$

Zeige: $\nabla_{fX}(s) = f\nabla_X(s)$

**Aufgabe 2**. (Fortsetzung). Zeige, dass $d : \Omega^0(U, W) \to \Omega^1(U, W)$ eine kovariante Ableitung ist. Sei $\eta \in \Omega^1(U, \mathrm{End}(W))$. Zeige, dass $d + \eta$ eine kovariante Ableitung ist.

**Aufgabe 3**. (Fortsetzung). Zeige, für jede kovariante Ableitung $\nabla : \Omega^0(U, W) \to \Omega^1(U, W)$, dass $(\nabla - d)(fs) = f(\nabla - d)(s)$ gilt. Schliesse, dass $(\nabla - d)_X(s)(p)$ nur von $s(p)$ und $X_p$ abhängt und eine Form $\eta \in \Omega^1(U, \mathrm{End}(W))$ definiert. Es gilt $\nabla = d + \eta$.

**Aufgabe 4**. Sei $B$ die Riemannsche Metrik auf $\mathbb{R}^2$, die in Aufgabe 3 Blatt 1 definiert ist. Berechne die kovariante Ableitung $\nabla : \Omega^0(R^2, R^2) \to \Omega^1(R^2, R^2)$, die ohne Torsion und $B$-isometrisch ist. Ohne Torsion heisst, dass für Vektorfelder $X, Y \in \Omega^0(R^2, R^2)$ gilt:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

wobei $[?, ?]$ die Liesche Klammer ist. $B$-isometrisch heisst, dass für Vektorfelder $X, Y, Z \in \Omega^0(R^2, R^2)$ gilt:

$$d_Z B(X, Y) = B(\nabla_Z X, Y) + B(X, \nabla_Z Y)$$

**Aufgabe 5**. (Fortsetzung). Schreibe und studiere für Wege $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ die ifferentialgleichung $\nabla_{\dot{\gamma(t)}} \dot{\gamma(t)} = 0$