Prof. N. A'Campo Lenzsemester 2007

Übungen zur Vorlesung Differentialgeometrie

1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei V ein reeller Vektorraum endlicher Dimension und sei $U \subset V$ eine offene Teilmenge. Sei $B : U \to \mathrm{Sym}^2(\mathrm{V})$ eine Riemannsche Metrik auf U. Sei $\gamma : [a, b] \to U$ ein stetig differenzierbarerWeg. Zeige, dass die Länge

$$\text{Länge}_B(\gamma) := \int_a^b \sqrt{B_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

nicht von der Parametrizierung des Weges γ abhängt.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Sei U zusammenhängend. Dann ist U auch Weg-zusammenhängend. Seien $p, q \in U$. Sei

$$WDist(p, q) := \mathrm{Inf}_\gamma \text{Länge}_B(\gamma)$$

wobei hier das Infimum über alle stetig differenzierbare Wege $\gamma : [0, 1] \to U$ mit $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ gebildet wird. Sei

$$FDist(p, q) := \mathrm{Sup}_f |f(p) - f(q)|$$

wobei hier das Supremum über alle stetig differenzierbare Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ mit $|(Df)_s(u)| \leq \sqrt{B_s(u, u)}, s \in U, v \in V$ gebildet wird. Zeige:

$$WDist(p, q) = FDist(p, q)$$

Zeige, dass $D(p, q) := FDist(p, q) = WDist(p, q)$ eine Distanz auf U definiert.

Aufgabe 3. Seien $x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen zu der Basis $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Riemannsche Metrik

$$B_p(u, v) := e^{x(p)^2 + y(p)^2}(x(u)x(v) + y(u)y(v))$$

Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\Omega(p, q)$ der Raum aller zweimal stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Für $\gamma \in \Omega(p, q)$ und $h \in \Omega(0, 0)$ ist $\gamma + h \in \Omega(p, q)$. Sei $L : \Omega(p, q) \to \mathbb{R}$ die Abbildung $\gamma \in \Omega(p, q) \mapsto \text{Länge}_B(\gamma) \in \mathbb{R}$. Schreibe die Dreigliedentwickelung für $L(\gamma + h)$. Ist $\Omega(0, 0)$ ein Vektorraum? Mit welcher Norm auf $\Omega(0, 0)$ arbeiten Sie? Sei $(DL)_\gamma : \Omega(0, 0) \to \mathbb{R}$ das Differential.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Sei $\gamma \in \Omega(p, q)$ gegeben. Wir nehmen an, dass $\dot{\gamma}(t) \neq 0, t \in [0, 1]$, gilt. Zerlege $h \in \Omega(0, 0)$ als $h = h_T + h_N$ wobei $h_T, h_N \in \Omega(0, 0)$ mit $B_{\gamma(t)}(h_T(t), h_N(t)) = B_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), h_N(t)) = 0, t \in [0, 1]$ gilt. Zeige: $(DL)_\gamma(h_T) = 0, h \in \Omega(0, 0)$. Hinweis: Aufgabe 1.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Sei $\gamma \in \Omega(p, q)$ minimierend für L. Zeige: $(DL)_\gamma(h_N) = 0, h \in \Omega(0, 0)$. Schliesse:$(DL)_\gamma = 0$.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Leite für γ eine Differentialgleichung der Ordnung 2 her.

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Löse diese Differentialgleichung für $p = e_1, q = e_2$.

Aufgabe 8. Wir orientieren $\mathbb{R}^2$ mit der Orientierungsklasse der Basis e_1, e_2. Berechne $*_B\omega$ für die 1-Differentialformen dx, dy, xdy. Berechne $*_B 1, *_B dx \wedge dy$.

Aufgabe 9. Berechne $\Delta_B(cosh(x(p)^2 + y(p)^2)$.

Aufgabe 10. Sei E das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Die Metriken E und B sind proportional, d.h. es existiert eine Funktion m auf $\mathbb{R}^2$ mit $B = mE$. Vergleiche die Differentialoperatoren Δ_E und Δ_B. Zeige für eine Funktion f auf $\mathbb{R}^2$, dass die Eigenschaften der E- und B-Harmonie $\Delta_E(f) = 0$ und $\Delta_B(f) = 0$ äquivalent sind.

Aufgabe 11. Berechne den Kommutator $[*_B, *_E] := *_B \circ *_E - *_E \circ *_B$.