Algorithmische Topologie

Lektion 8. Ein Algorithmus zur Erkennung der 3-Sphäre.

8.0. Bemerkungen zu der Lektion 7.

Wir geben hier eine Definition des Dehnfaktor und erklären (aber beweisen nicht) seine Eigenschaften.

Sei F eine Fläche. Wählen wir eine Riemannsche Metrik μ auf F. Für eine wesentliche Kurve $C \subset F$ wird die minimale Länge der Kurven, die zu C isotop sind, durch $|C|_\mu$ bezeichnet.

Definition. Sei $f: F \to F$ ein *pseudo-Anosov* Homöomorphismus, d.h. ein Homöomorphismus, der keine wesentlichen periodischen Kurven zuläßt. Wählen wir eine wesentliche Kurve C auf F. Dann ist der Dehnfaktor $\lambda(f)$ durch die folgende Formel gegeben:

$$\lambda(f) = \lim_{n\to\infty} |f^n(C)|_\mu^{1/n}.$$

Es stellt sich heraus, daß $\lambda(f)$ von der Wahl von C und μ unabhängig ist.

Um $\lambda(f)$ zu kalkulieren, betrachten wir eine Henkelzerlegung ξ von F in Inseln und Brücken. Wir können annehmen, daß f Inseln nach Inseln abbildet. Sei Γ ein Mittelgraph von ξ. Die Eckpunkte von Γ sind die Zentren von Inseln, die Kanten K_i von Γ entsprechen den Brücken $B_i, 1 \le i \le m$.

Es ist leicht, f so isotop zu deformieren, daß das Bild $f(K_i)$ jeder Kante eine "fast normale" Kurve ist, d. h. $f(K_i)$ hat keine Umkehrungen (wir haben "fast" gesagt, weil $f(K_i)$ eine unpropere Kurve ist und darum der Definition der normalen Kurve nicht völlig entspricht). Wir können auch annehmen, daß für jede Kante K_i nicht nur $f(K_i)$, sondern alle Kurven $f^n(K_i), 1 \le n \le \infty$, fast normal sind. Das ist etwas schwieriger, dann um dies zu erreichen, müssen wir nicht nur f, sondern auch ξ ändern.

Jetzt schreiben wir die Matrix $M_f = (a_{ij})$, wobei a_{ij} die Anzahl der Strecken in $f(K_i) \cap B_j$ ist. Die Elemente von M_f sind nicht-negativ. Jede solche Matrix bestimmt eine lineare Abbildung $M_f: R^m \to R^m$, die den positiven Quadrant $Q_+ = \{\bar{x} : x_i \ge 0\}$ auf sich selbst abbildet. Jede solche Abbildung hat einen einzigen Eigenvektor $\bar{v}$ mit Eigenwert $\lambda > 1$ (falls es zwei solche Vektoren göbe, würde f periodische Kurven haben). Dieses λ ist der Dehnfaktor.

Um dies zu erklären, betrachten wir die induzierte Abbildung $f': \sigma \to \sigma$, wobei σ das Simplex mit Eckpunkten $(1, 0, \dots, 0), \dots (0, 0, \dots 1)$ ist. Man kann f' so beschreiben: $f'(\bar{x}) = \bar{y}$, wenn f der Strahl $\{t\bar{x}, t \ge 0\}$ auf den Strahl $\{t\bar{y}, t \ge 0\}$ abbildet. Die Abbildung f' ist komprimierend. Daraus folgt, daß für große n das Bild $f^n(Q_+)$ in einer sehr engen Umgebung des Strahles $\{t\bar{v}, t \ge 0\}$ liegt. Siehe Fig.1.

Es sei bemerkt, daß die Elemente der Matrix M_{f^n} wie λ^n wachsen. Dies bedeutet, daß die Anzahlen von Strecken in $f^n(K_i \cap B_j)$ auch wie λ^n wachsen. Dasselbe gilt für Längen von Kanten in jeder Metrik und darum für allen wesentlichen Kurven. Dies bedeutet, daß die Wurzeln vom Grad n von diesen Längen den konstanten Wert λ zustreben.