Algorithmische Topologie

Lektion 3. Zwei Endlichkeitssätze.

3.1. Irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten und inkompressible Flächen.
Sei F eine Fläche in einer 3-Mannigfaltigkeit M. Dann heißt F *kompressibel* in M, wenn es eine Scheibe D in M gibt, die F nur längs ihres Randes ∂D berührt, und wenn ∂D auf F nicht trivial ist. D heißt eine *komprimierende* Scheibe für F. Eine proper Fläche F in M ist *randkompressibel*, wenn sie eine komprimierende Halbscheibe zuläßt, siehe Fig. 1. Nach dieser Definition sind jede Sphäre und projektive Ebene inkompressibel, und jede propere Scheibe ist inkompressibel und randinkompressibel. Manchmal nennt man eine Sphäre nur dann inkompressibel, wenn sie nicht einen Ball berandet, aber wir bevorzugen das nicht zu machen.

Eine 3-Mannigfaltigkeit M heißt *irreduzibel*, wenn jede Sphäre in M einen 3-Ball berandet. M ist *randirreduzibel*, wenn ∂M inkompressibel ist.

Kriterium. Sei $F \overset{i}{\subset} M$ eine zwei-seitige Fläche. F ist genau dann inkompressibel, wenn der Homomorphismus $i_* : \pi_1(F) \to \pi_1(M)$ injektiv ist.

Beispiel. Kleben wir an $K^2\tilde{\times}I$ (K^2 ist die Kleinsche Flasche) eine Platte H entlang eine eingach geschlossene Kurve $l \subset T^2 = pK^2\tilde{\times}I$, so daß die Projektion von l auf K^2 nicht zu dem Meridian μ oder Längskreis λ isotop ist. Dann ist die Mittenfläe $K^2\tilde{\cup}\{*\}$ inkompressibel (weil ihre einzige einfache Kurven μ und λ nicht nullhomotop werden), aber nicht injektiv in π_1.

Satz 3.1. *Sei M eine triangulierte irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit inkompressiblem Rand. Dann ist jede inkompressible randinkompressibe Fläche $F \subset M, F \neq S^2, D^2$, isotop zu einer normalen Fläche.*

Beweis. Man muß nur kleine Kreise und propere Bögen im Innern der Dreiecke vernichten. Sei K der kleinste Kreis, der keine weitere Kreise enthält. Dann berandet er eine Kreisscheibe D in dem Dreieck. Da F inkompressibel ist, berandet K auf F eine andere Scheibe D_1. Da M irreduzibel ist, gibt es einen Ball B^3 mit $\partial B = D \cup D_1$. Jetzt können wir D_1 durch B^3 isotopieren und dadurch K vernichten.

Was propere Bögen im Innern der Dreicke betrifft, machen wir dasselbe, aber statt absoluter Bedingungen verwenden wir entsprechende Randbedingungen.

3.2. Zwei Endlichkeitssätze von Haken.

Erster Satz.(Kneser). *Sei M eine orientierbare triangulierte irreduzible 3-Mannigfaltigkeit, und sei $\mathcal{F}$ eine Menge von orientierbaren geschlossenen Flächen in M, so daß das folgende gilt:*

1. *Die Flächen sind inkompressibel;*
2. *Sie sind zusammenhängend und disjunkt;*
3. *Sie sind paarweise nicht parallel.*

Dann ist die Anzahl der Flächen in $\mathcal{F}$ nicht größer als $10t$, wobei t die Anzahl der Tetraeder der Triangulation ist.

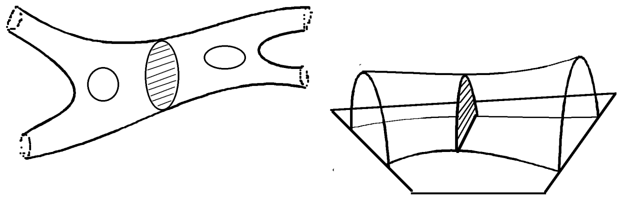

Figure 1: Komprimierende und halbkomprimierende Scheiben

Beweis. Nehmen wir an, daß die Anzahl der Flächen größer als $10t$ ist. Da die Flächen inkompressibel sind, kann man annehmen, daß sie normal sind. Sie zerlegen jedes Tetraeder in Teile. Der Teil eines Tetraeders heißt *schlecht*, wenn er nicht homöomorph zu $D^2 \times I$ ist. Jeder Tetraeder kann nur ≤ 6 schlechte Teile enthalten. Die zusammenhängenden Komponenten des Durchschnitts von Flächen mit Tetraedern sind *Flicken* genannt. Ein Flicken heißt *schlecht*, wenn er im Rand eines schlechten Teils liegt. Die Anzahl der schlechten Flicken ist nicht größer als $10t$, da jedes Tetraeder höchstens 10 schlechte Flicken enthält (siehe Fig.2). Falls die Anzahl der Flächen größer als $10t$ ist, dann enthält mindestens eine Fläche $F \in \mathcal{F}$ keine schlechten Flicken . Dann bilden die guten Tetraederteile, die an F angrenzen, zwei I-Bündel. Falls diese Bündel nicht trivial sind, d. h. haben die Form $G\tilde{\times}I$ für einer einseitigen Fläche G, dann ist F die einzige Fläche in $\mathcal{F}$. Falls die Bündel trivial sind, d. h. haben die Form $F \times I$, bekommen wir einen Widerspruch zu der Annahme, das die Flächen paarwise nicht parallel sind.

Zweiter Satz. *Sei M eine triangulierte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit. Nehmen wir an, daß M keine normalen Sphären oder Tori enthält. Dann gibt es für jeders k eine endliche Menge $\mathcal{F}$ von inkompressiblen geschlossenen Flächen mit folgender Eigenschaft:*

Jede geschlossene inkompressible Fläche $F \subset M$ mit $-\chi(F) \leq k$ ist zu einer Fläche $F \in \mathcal{F}$ isotop.

Beweis. Seien $F_1, \ldots, F_n$ fundamentale Flächen. Da M keine normalen Sphären und Tori enthält (und folglich keine projektiven Ebenen und Kleinschen Flaschen), sind die Eulerschen Charakteristiken $\chi_i = \chi(F_i)$ negativ. Es gibt nur endlich viele Kombinazionen $\sum_{i=1}^{n} k_i(-\chi_i), k_i \geq 0$, die nicht größer als k sind. Deshalb ist die Anzahl der normalen Flächen mit $-\chi \leq k$ endlich.

3.3. Haken 3-Mannigfaltigkeien. Eine 3-Mannigfaltigkeit heißt *hinreichend groß*, wenn sie eine zweiseitige geschlossene inkompressible Fläche $F \neq S^2, RP^2$ enthält. Die Klasse der hinreichend großen 3-Mannigfaltigkeiten ist "hinreichend groß". Zum Beispiel ist jede irreduzible 3-Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand entweder hinreichend groß oder homöomorph zu einem Brezel. Eine hinreichend große 3-Mannigfaltigkeit M ist *Haken*, wenn sie irreduzibel und randirreduzibel ist.

Eine Homotopieäquivalenz $f : M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten M, N

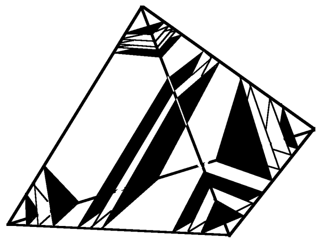

Figure 2: Schlechte Scheiben sind schwarz

heißt *randtreu*, wenn $f : M \to N$ und $f_{|\partial M} : \partial M \to \partial N$ Homotopieäquivalenzen sind.

Lemma 4.1. *Sei $f : F \to G$, wobei F, G Flächen sind, eine randtreue Homotopieäquivalenz. Dann läßt sich f stetig in einen Homöomorphismus $f_1 : F \to G$ deformieren.*

Beweis. Man kann annehmen, daß f simplizial ist, und daß $f_{|\partial F} : \partial F \to \partial G$ schon ein Homöomorphismus ist. Wählen wir eine Kollektion von Bögen in G, die G zu einer Scheibe aufschneiden und eckpunktfremd sind. Dann ist das Urbild jedes Bogens g_i die Vereinigung von einen Bogen b_i, der entsprechende Randpunkte verbindet, und einigen Kreisen, die unwichtig sind. $f_{|b_i}$ läßt sich so deformieren, daß es nachher b_i auf g_i homöomorph abbildet, and dann kann man diese Deformation zu einer homotopen Deformation von f erweitern. Die Bögen b_i schneiden F auch zu einer Scheibe auf. Deshalb kann die Kegelkonstruktion verwendet werden, um f schließlich auf den Scheiben homöomorph zu machen.

Satz 3.2. (Waldhausen). *Sei $f : M \to N$, wobei M, N Haken 3-Mannigfaltigkeiten sind, eine randtreue Homotopieäquivalenz. Dann läßt sich f stetig in einen Homöomorphismus $f_1 : M \to N$ deformieren.*

Beweis. Nach Lemma 4.1 kann man annehmen, daß $f_{|\partial M} : \partial M \to \partial N$ schon ein Homöomorphismus ist. Wie verwenden dieselbe Idee wie für Flächen, aber anstatt Bögen werden inkompressible, randinkompressible Flächen betrachtet. Also ist der Prozeß mehrstufig, da die Randkurven der nächsten Flächen auf den vorigen Flächen liegen können. Sei G eine nächste Fläche in N. Wir können annehmen, daß G nicht durch die Eckpunkte geht. Dann ist das Urbild $F = f^{-1}(G)$ eine Fläche, deren Rand homöomorph auf ∂G abgebildet wird. F kann kompressibel sein. Wir komprimieren nicht-triviale Rohre in F durch eine Homotopie von f. Beschreiben wir diese Prozedur ausführlicher.

Sei D eine komprimierende Scheibe für F. Erstens kann man $f_{|F} : F \to G$ so deformieren, daß es nachher ∂D auf den Rand einer kleinen Scheibe $K \subset G$ homöomorph abbildet. Die Deformation kann zu einer Deformation von f erweitert werden. Zweitens kann man f so deformieren, daß f auf einer kleinen Umgebung von F fix bleibt und daß die neue Abbildung (wie früher f genannt) D auf eine komprimierende Scheibe $D_1, \partial D_1 = \partial K$, homöomorph abbildet. Die Scheiben K und D_1 beranden einen Ball $B \subset N$. Jetzt ersetzen wir f durch das Produkt hf, wobei die Abbildung $h : N \to N$ außer einer engen Umgebung

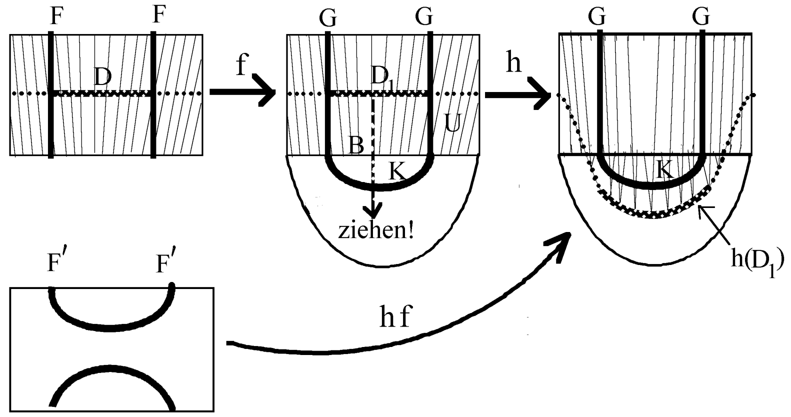

Figure 3: Wir schleppen D_1 hinunter, aber lassen den Rand der Platte U fix bleiben.

U von D_1 fix ist und D_1 durch B auf die andere Seite von K zieht. Siehe Figur 3. Das Ergebnis besteht darin, daß F längs D komprimiert ist zu einer neuen Fläche $F' = (hf)^{-1}(G)$.

Falls F schon inkompressibel ist, dann ist $f_{|F} : F \to G$ eine Homotopieäquivalenz . Sie läßt sich in einen Homöomorphismus deformieren (Lemma 4.1).

Letzten Endes bekommen wir eine Vereinigung P von Flächen in M und eine Vereinigung Q von Flächen in N, so daß das folgende gilt:

1. $f : P \cup \partial M \to Q \cup \partial N$ ist ein Homöomorphismus;

2. Die Außenräume von $P \cup \partial M$ und $Q \cup \partial N$ bestehen aus 3-Bällen.

Dann verwenden wir wieder die Kegelkonstruktion.