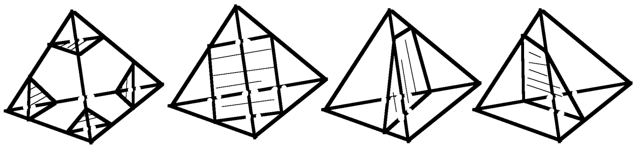

Figure 1: Elementare Kreisscheiben

Algorithmische Topologie

Lektion 2. THEORIE DER NORMALEN FLÄCHEN.

2.1. Normale Flächen in triangulierten 3-Mannigfaltigkeiten.

Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit mit einer Triangulation T.

Definition. Eine Fläche $F \subset M$ heißt *normal*, wenn das folgende gilt:

1. Der Schnitt von F mit jedem Tetraeder Δ^3 besteht aus Kresscheiben. Diese Kreisscheiben heißen *elementar*;
2. Die Randkurve jeder Elementarscheibe ist eine normale Kurve in $\partial\Delta^3$;
3. Die Randkurve jeder Elementarscheibe schneidet jede Kante von Δ^3 höchstens in einem Punkt.

Es ist leicht zu zeigen, daß es in jedem Tetraeder genau sieben Typen von zulässigen Elementarscheiben gibt: vier Dreiecke, die Eckpunkte des Tetraeders abschneiden, und drei Vierecke, siehe Figure 2.

Seien $T_1, T_2, \ldots, T_n$ die Scheibentypen in allen Tetraedern, und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die entsprechende Variablen. Betrachten wir ein Dreieck Δ^2, das zwei Tetraeder Δ^3_1, Δ^3_2 der Triangulation trennt. Wählen wir zwei Kanten K_1, K_2 von Δ^2.

Dann schreiben wir die Gleichung

$$x_i + x_j = x_k + x_l.$$

Hier sind T_i, T_j und T_k, T_l die Scheibentypen für Δ^3_1 und Δ^3_2, deren Randkurven von K_1 zu K_2 im Inneren von Δ^2 gehen. Es ist offensichtlich, daß jede normale Fläche eine nicht-negative ganzzahlege Lösung des so entstandenen normalen System bestimmt. Die umgekehrte Behauptung ist falsch, da sich schneiden können, so der Schnitt von zwei verschiedenen Vierecken nicht beseitigt werden kann. Eine *zulässige* Lösung darf nicht solche Paare mit positiven Koeffizienten enthalten.

Satz 2.1. *Es existiert eine natürliche Bijektion zwischen normalenFlächen und zulässigen Lösungen.*

Genau wie in der Normalkurventheorie, haben die Lösungen des normalen Gleichungsystems eine endliche Basis. *Fundamentale* Flächen, die zulässigen Basislösungen entsprechen, bilden eine geometrische Basis für alle normalen Flächen. Die *Umschaltung* besteht darin, daß wir zwei Flächen entlang alle Doppelkurven aufschneiden und dann zusammenkleben, so daß die neue Fläche normal wird. Es folgt, daß man jede normale Fläche aus fundamentalen Flächen durch aufeinanderfolgende Umschaltungen bekommen kann.

2.2. Anwendungen

ALLGEMEINES SCHEMA FÜR LÖSUNG ALGORITHMISCHEN PROBLEME.

Schritt 1. Wir ersetzen das gegebene Problem durch ein Problem, das Flächen in Mannigfaltigkeiten betrifft. Eine Standardvariante: ob M eine Fläche enthält, die eine spezielle Eingeschaft E hat. Solche Flächen werden *interessant* genannt.

Schritt 2. Wir beweisen, daß wenn M eine interessante Fläche enthält, dann man eine interessante Fläche unter normalen Flächen finden kann.

Schritt 3. Wir zeigen, daß eine interessante Fläche unter fundamentalen Flächen gefunden werden kann.

Schritt 4. Man muß auch einen Algorithmus konstruieren, der entscheidet, ob eine gegebene Fläche die Eigenschaft E besitzt.

Wir beschreiben jetzt ein Beispiel, wie das Schema angewandt werden kann.

Satz 2.2. *Es exitiert ein Algorithmus zur Erkennung des trivialen Knoten.*

Beweis. Schritt 1. Sei K einen Knoten in S^3. Bezeichnen wir mit $C(K)$ seinen Außenraum. In anderen Worten, $C(K) = S^3 \setminus \text{ Int } N(K)$, wo $N(K)$ eine offene reguläre Umgebung von K ist. Der Vollring $N(K)$ hat einen Meridian and einen Längskreis, der Null in der Homologiegruppe $H_1(C(K); Z)$ bestimmt. Kleben wir zu $C(K)$ eine Platte (einen Henkel $H = D^2 \times I$ von Index 2) entlang des Längskreises. Die bekommene Mannifaltigkeit wird mit M bezeichnet. Sei T eine Triangulation von M, so daß eine Strecke $I_0 = \{*\} \times I \subset H$ als eine Kante von T dient. Wir sagen, daß eine geschlossene Fläche $S \subset M$ interessant ist, wenn S zur 2-Sphäre homöomorph ist und mit I_0 genau einen gemeinsamen Punkt hat.

Behauptung: K ist trivial dann und nur dann, wenn M eine interessante Fläche enthält.

Damit ist das Trivialitätsproblem für Knoten zu einem Standardproblem über Flächen reduziert.

Schritt 2. Sei S eine interessante Sphäre in M. Es ist nicht schwierig, S so deformieren, daß nachher S alle Eigenschaften einer normalen Fläche besitzt, außer einem: der Schnitt von S mit Dreiecken kann kleine Kreisen enthalten. Sei C ein solchen Kreis. Dann schneiden wir S längs dieses Kreises auf und füllen die entstandene Löcher mit zwei Kreisscheiben . Die Prozedur gibt uns zwei Sphären, unter denen genau eine interessant ist. Man muß bemerken, daß die neue interessante Sphäre einfacher ist. (Wir messen die Kompliziertheit der Sphäre mit dem *Kantengrad*, d.h. mit der Anzahl der Punkte in dem Durchschnitt der Sphäre mit allen Kanten). Dieses Verfahren fortsetzend, bekommen wir schließlich eine normale interessante Sphäre.

Schritt 3. Nehmen wir an, daß die normale Sphäre S nicht fundamental ist. Dann kann man S in der Form $S = F_1 + F_2$ darstellen. Wir können annehmen, daß diese Darstellung die sparsamste ist, d. h. $F_1 \cap F_2$ besteht aus der minimalen möglichen Zahl von Doppelkreisen . Dann gilt:

1. F_1 und F_2 sind zusammenhängend;

2. Jeder Doppelkreis mindestens eine Fläche nicht auf zwei Teile zerlegt.

(Sonst kann man die Flächen längst einigen Doppelkreise umschalten und eine sparsamere Darstellung bekommen). Da die Euler Charakteristik additiv ist (d.h. $\chi(F_1 + F_2) = \chi(F_1) + \chi(F_2)$), es gibt die einzige Möglichkeit $\chi(F_1 + F_2) = \chi(S^2) = 2$ zu bekommen: F_1, F_2 sind eine Sphäre und ein Torus. Nur eine von beiden Flächen (sei F_1) schneidet I_0.

FALL 1. F_1 ist eine Sphäre. Dann sind wir zufrieden, da diese Sphäre interessant und einfacher ist.

FALL 2. F_1 ist ein Torus, F_2 ist eine nicht interessante Sphäre. Die Doppelkurven aus $F_1 \cap F_2$ sind auf F_1 nicht trivial, folglich parallel. Dann teilen sie F_1 in Kreisringe, unter denen nur ein Kreisring A den einzigen Schnittpunkt $F_1 \cap I_0$ enthält. Der Rand ∂A besteht aus zwei Kreisen C_1, C_2, die zwei disjunkte Kreisscheiben D_1, D_2 auf der Sphäre F_2 beranden. Dann kann man aus A, C_1, C_2 eine neue interessante Sphäre $S' = A \cup C_1 \cup C_2$ zusammenstellen. Sicherlich ist S' einfacher als S.

Dieses Verfahren wird schließlich mit einer fundamentalen normalen Sphäre beendet.

Schritt 4 ist offensichtlich.