Algorithmische Topologie

Lektion 6. Algorithmische Klassifikation von Haken 3-Mannigfaltigkeiten (modulo 3-Mannigfaltigkeiten von Stallings).

6.1. Zweiter (echter) Endlichkeitssatz für einfache 3-Mannigfaltigkei ten. In Lektion 4 wurde gezeigt, daß eine triangulierte 3-Mannigfaltigkeit M nur endlich viele inkompressible geschlossene Flächen mit $-\chi \leq k$ enthält, unter der Voraussetzung, daß es keine normalen Flächen mit $\chi \geq 0$ gibt. Hier zeigen wir, daß der Satz für jede einfache 3-Mannigfaltigkeit mit Randmuster auch ohne diese Voraussetzung stimmt.

Satz 6.1. *Sei M eine triangulierte orientierbare 3-Mannigfaltigkeit mit Randmuster Γ, das aus Kanten besteht. Nehmen wir an, daß (M, Γ) irreduzibel, randirreduzibel und einfach ist. Dann gibt es für jedes k eine endliche Menge $\mathcal{F}$ von inkompressiblen randinkompressiblen Flächen in M mit folgender Eigenschaft:*

Jede inkompressible randinkompressible Fläche $F \subset M$ mit Kompliziertheit $c(F) = -\chi(F) + \#(F \cap \Gamma) \leq k$ ist zu einer Fläche $F \in \mathcal{F}$ rein isotop (eine Isotopie heißt rein, wenn sie zu einer Isotopie $(M, \Gamma) \to (M, \Gamma)$ erweitert werden kann).

Der Beweis stützt sich auf folgendes Lemma.

Lemma 6.1. *Sei F eine irreduzible randirreduzible normale Fläche in M. Nehmen wir an, daß F in der Form $F = G_1 + G_2$ dargestellt werden kann, wobei G_1 ein unwesentlicher Torus oder ein reiner unwesentlicher Kreisring ist. Dann gilt: entweder ist F zu einer Fläche F' mit dem kleineren Kantengrad rein isotop, oder F hat eine Darstellung $F = G_1' + G_2'$, wobei G_i' zu G_i isotop ist und $G_1' \cap G_2'$ aus weniger Kurven als $G_1 \cap G_2$ besteht.*

Beweis. Erstens zeigen wir, daß das Ergebnis stimmt, wenn $G_1 \cup G_2$ Scheiben- oder Halbscheibenflicken enthält. Das Verfahren dazu ist dasselbe wie in der algorithmischen Bestimmung des Geschlechts einer Randkurve (Lektion 3). Nehmen wir an, daß $G_1 \cap G_2$ weder Scheiben- noch Halbscheibenflicken enthält. Dann sind alle Doppelkreise oder Doppelbögen auf G_1 nicht-trivial.

Sei G_1 ein Torus, der zu einem reinen Randtorus parallel ist.

1. Nehmen wir an, daß es in dem Raum $X = G_1 \times I$ zwischen beiden Tori einen Kreisringflicken $A_2 \subset G_2$ gibt, der zu einem Kreisringflicken $A_1 \subset G_1$ parallel ist. Es sind drei verschiedene Umschaltungen längs ∂A möglich (das vierte Paar von Umschaltungen produziert eine nicht zusammenhängende Fläche). Figur 1a zeigt, warum in zwei Fällen F zu einer einfacheren Fläche F' rein isotop ist und in einem Fall F eine einfachere Darstellung $F = G_1' + G_2'$ besitzt.

2. Nehmen wir an, daß $G_2 \cap X$ aus Kreisringen besteht, die eine Randkomponente auf G_1 und die andere auf ∂M haben. Dann müssen die regulären Umschaltungen dieselbe Richtung haben, andernfalls bekommen wir eine nicht zusammenhängende Fläche. Figur 1b zeigt, warum F zu der einfacheren Fläche G_2 rein isotop ist. Damit ist der Fall eines randparallelen Torus erledigt.

Die Fälle eines kompressiblen Torus und eines unwesentlichen Kreisrings lassen sich durch ein ähnliches Verfahren bearbeiten.