Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2007

Lesungen am runden Tisch.

Freitag, den 12.10.2007.

Die modulare Triangulierung und die Gruppe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$

Für zwei rationale Zahlen $a/b, c/d,\ a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N}$, und $t \in]0,1[$ sei z_t die Nullstelle von $t(z-a/b)^2 + (1-t)(z-c/d)^2$ mit $\mathrm{Im}(z_t) > 0$. Zeichne die Kurve $t \in]0,1[\mapsto z_t \in \mathbb{C}$.

Wir sagen, dass zwei rationale Zahlen $a/b, c/d$, $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N}$, sich berühren, wenn $(ad-bc)^2 = 1$ gilt. Die Bedingungen - $(ad-bc)^2 = 1$, und - die konvexe Hülle in $\mathbb{R}^2$ von $\{(0,0),(a,b),(c,d)\}$ schneidet das Gitter $\mathbb{Z}^2$ in genau drei Punkte, sind äquivalent. Wir sagen weiter, dass eine Teilmenge $\{u,v\} \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ mit zwei Elemente ein Duo ist, wenn $\{u,v\} \subset \mathbb{Q}$ und u berührt v oder $\{\infty\} \subset \{u,v\} \subset \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ gilt. Sei Γ die Gruppe aller Bijektionen von $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ nach $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, die Duo's auf Duo's schicken. Zeige, dass die Gruppe Γ isomorph zu $PGL(2,\mathbb{Z})$ ist.

Interpretiere $\mathbb{Q}$ als Teilmenge des Abschlusses der obere Halbebene H in $\mathbb{C}$. Verbinde für jedes Duo $\{u,v\}$ geodätisch in H die Punkte u und v. Zeige, dass diese Geodätische paarweise disjunkt sind. Ein Trio ist eine Teilmenge T mit drei Elemente in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ derart, dass jede Teilmenge $D \subset T$ mit zwei Elemente ein Duo ist. Jedes Trio definiert ein ideales Dreiech in der oberen Halbebene und die Trio's definieren eine ideale Triangulierung, die sogenannte modulare Triangulierung, der oberen Halbebene. Hinweis: Fordsche Kreise, und die Fareysche Auflistung der rationalen Zahlen.

Sei $A \in PSL(2\mathbb{Z})$ mit $\mathrm{Spur}(A)^2 > 4$. Zeige, dass genau eine Geodätische L_A in H invariant unter A ist. Wir orientieren L_A von $p \in L_A$ nach $A(p) \in L_A$. Der Steg S_A von A ist die Vereinigung aller Dreiecke von Trio's, die von L_A durchlaufen werden. Zeige: $A(S_A) = S_A$. Beschreibe S_A mit einem endlichen zyklisches Wort W_A in zwei Buchstaben. Hinweis: betrachte den Abschnitt des Stegs aller Dreiecke von Trio's, die das Segment $[p, A(p)]$ schneiden aber $A(p)$ nicht enthalten.

Sei $A = [10,9;1,1]$ und $B = [10,3;3,1]$. Berechne W_A und W_B.

Klassification bis auf Konjugation in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Seien $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ mit $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B) \neq -2,-1,0,1,-2$. Zeige, die Äquivalenz von (i) und (ii):

(i) A und B sind in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ konjugiert,
(ii) W_A und W_B stimmen nach einer zyklischen Permutation überein.

Vollende die Klassifikation nach Konjugation in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Berechne $\mathrm{Supremum}_{A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})} \frac{\log(|\mathrm{Spur}(A)|+1)}{|W_A|+1}$.

Sei $t \in \mathbb{N}$. Berechne oder schätze die Anzahl von Konjugationsklassen in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ von Elemente A mit $\mathrm{Spur}(A)^2 = t^2$.