Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

Lesungen am runden Tisch
Freitag, den 17. Januar 2003

Das Bauschema S einer geometrischen Figur in einer ebenen Geometrie E bestehend aus Punkten und Geraden ist ein Tripel (P, G, I), wobei $P = [P_1, P_2, \cdots, P_N]$ eine Liste von Punkten, $G = [G_1, G_2, \cdots, G_M]$ eine Liste von Geraden, und $I = [I_1, I_2, \cdots, I_Z]$ eine Liste von Inzidenzen ist. Zum Beispiel $S = ([a, b], [A], [a \in A, b \in A])$ ist das Bauschema einer Figur bestehend aus zwei Punkten a, b und einer Geraden A durch a, b. Nicht jedes Bauschema lässt sich realisieren: zum Beispiel $S = ([a, b, c], [A], [a \neq b, a \in A, b \in A, c \in A, a \in B, b \in B, c \notin B])$ lässt sich in der ebenen Euklidischen Geometrie nicht realisieren.

Die Figur von Jiang-Zemin, cf. Lesung 15. November 2002, besteht aus Punkten, Geraden und Kreisen und kann mit einem Bauschema $S = (P, G, K, I)$ beschrieben werden. Im Quadrupel $= (P, G, K, I)$ sind P und G Listen von Punkten und Geraden, aber zusätzlich ist K eine Liste von Kreisen. Die Inzidenzliste I ist wie vorher, aber eine Inzidenz kann vielerlei bedeuten. Zum Beispiel kann man unter Inzidenz verstehen, dass eine Gerade einen Kreis berührt.

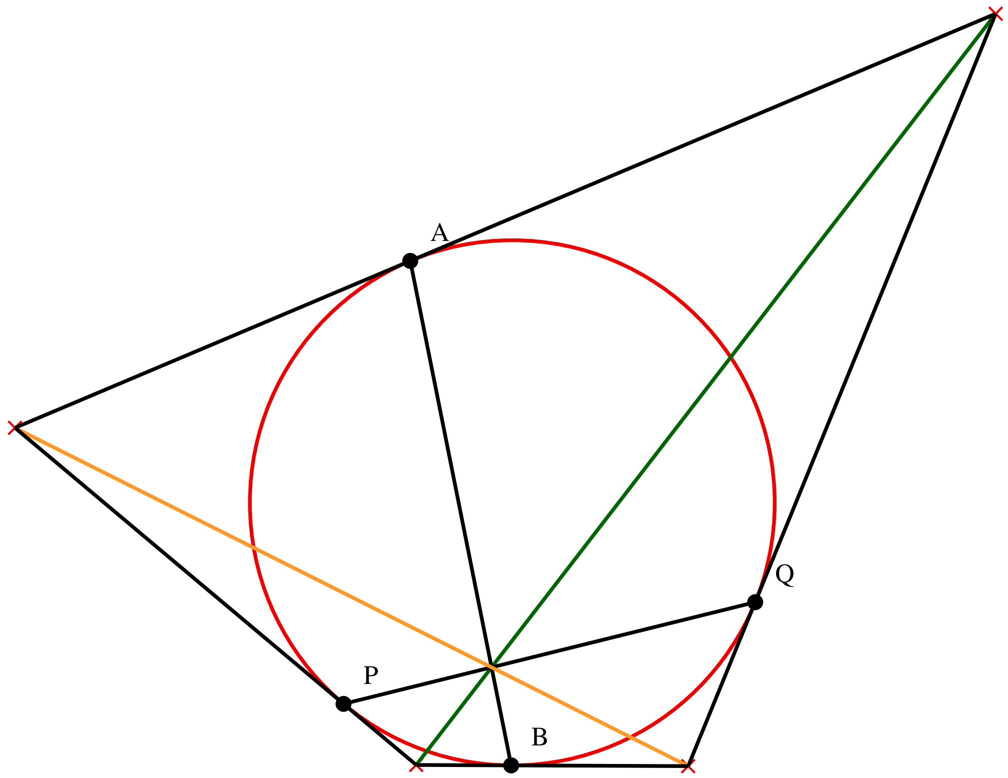
Ein Bauschema S heisst in der Geometrie E maximal realisierbar, wenn es möglich ist, in der Geometrie E Punkte, Geraden, ... in Anzahl übereinstimmend mit den Längen der Listen zu wählen, so dass alle Inzidenzen der Inzidenzliste erfüllt sind.

Ein Bauschema S ist für eine Geometrie E bemerkenswert, wenn die Liste der tatsächlich vorhandenen Inzidenzen in jeder maximalen Realisierung von S in E echt die Inzidenzen der Inzidenzliste von S enthält.

Folgendes Bauschema in der Euklidischen Ebene besteht aus Punkten, Geraden und einem Kreis und ist bemerkenswert:

$$S = ([a, b, c, d, e, f, g, h, p], [A, B, C, D, E, F, G, H], [K], I),$$

wobei folgendes gilt: K ist ein Kreis, die Punkte a, b, c, d liegen auf K, die Geraden A, B, C, D sind in a, b, c, d tangent an K, die Punkte e, f, g, h sind die Schnittpunkte $A \cap B, B \cap C, C \cap D, D \cap A$, die Geraden E, F sind die Diagonalen des in K eingeschriebenen Vierecks $[a, b, c, d]$, die Geraden G, H sind die Diagonalen des an K umschriebenen Vierecks $[e, f, g, h]$, und der Punkt p ist der Schnittpunkt der Diagonalen E, F. Die Inzidenzliste des Bauschemas S hat $22 = 4 + 4 + 4 + 8 + 2$ Einträge, die wir nicht explizit auflisten. Tatsächlich weist jede maximale Realisierung in der Euklidischen Ebene 24 Inzidenzen auf. Nämlich, der Punkt p liegt auf den Diagonalen des umschriebenen Vierecks.



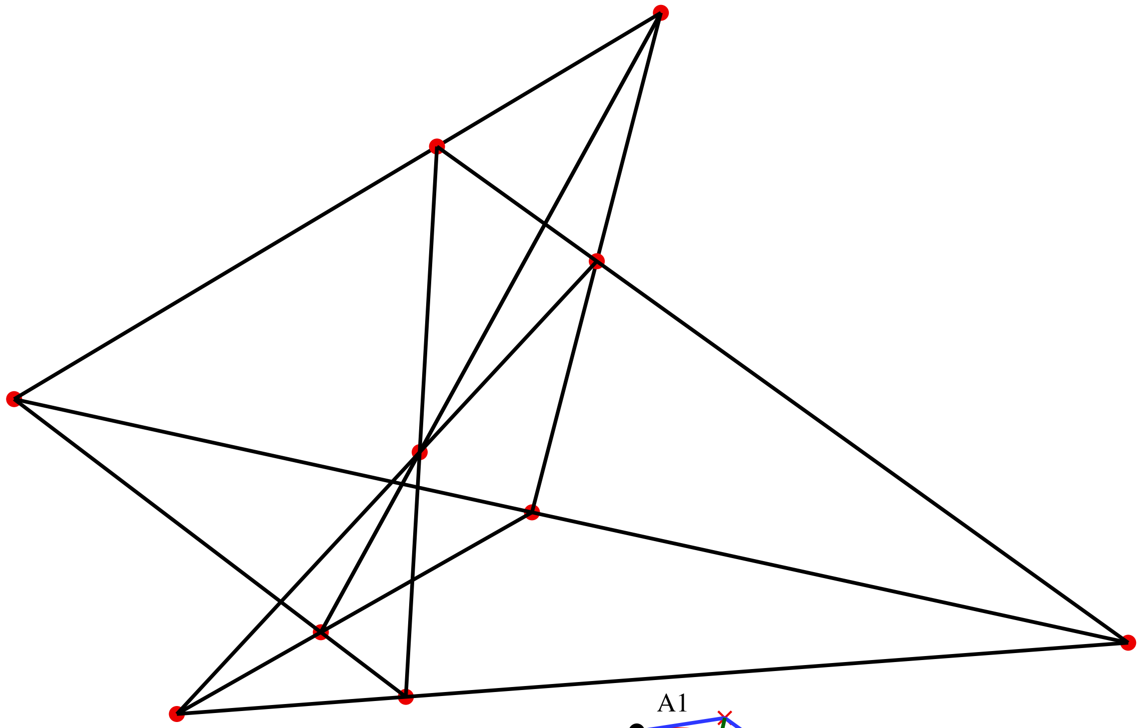
Der Beweis läuft im Kopf ab, indem man die Figur in der Euklidischen Ebene einer maximalen Realisierung von S uminterpretiert in der hyperbolischen Geometrie des Inneren des Kreises K. Es gilt für die hyperbolische Geometrie des Inneren von K, dass die Diagonalen E, F die Winkelhalbierenden der Sektoren der Diagonalen G, H sind. Natürlich sind dann E, F, G, H konkurrent in p.

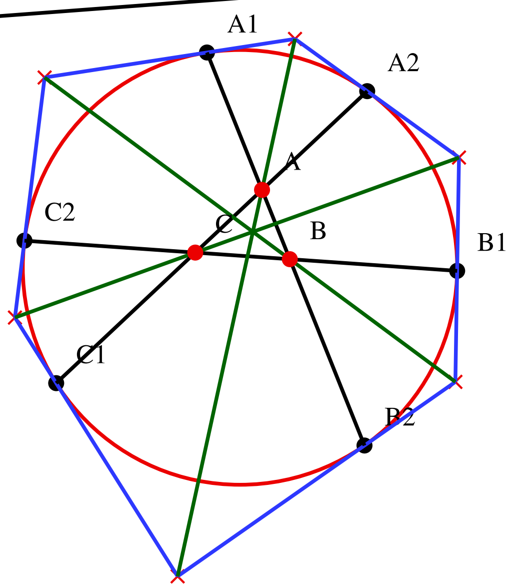
Der Beweis dafür, dass das Bauschema von Desargues bemerkenswert ist, erfolgt durch eine räumliche 3-dimensionale Interpretation der ebenen Figuren, die bei maximalen Realisierungen entstehen.

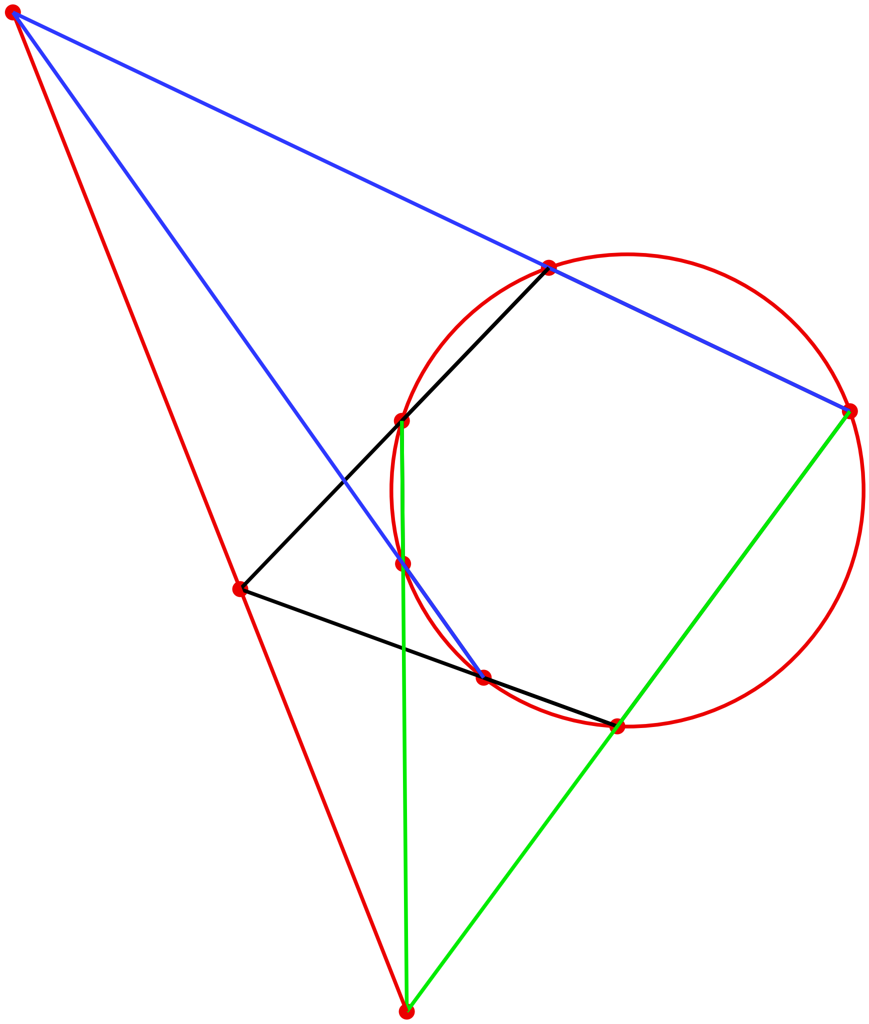
Der Satz von Pascal sagt aus, dass die 3 langen Diagonalen eines an einem Kreis umschriebenen Sechsecks konkurrent sind. Die folgende Figur liefert durch hyperbolische Interpretation den Beweis: die 3 langen Diagonalen erscheinen als Winkelhalbierende eines hyperbolischen Dreiecks. Diese wunderbare Figur hat Coxeter als Klappentext für sein Buch gewählt: H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, New York, 1961.

Eine ebene Figur lässt sich als Figur in einer Ebene E des 3-dimensionalen Vektorraumes V interpretieren. Man wähle E so, dass der Ursprung nicht in E liegt. Nun entsprechen Punkte der Figur 1-dimensionalen Untervektorräumen in V, etc ... Weiter entsprechen via Dualität i-dimensionale Untervektorräume in V Unterräumen im Dualraum V^* der Dimension $3 - 1$. Dieser Weg von Uminterpretationen wandelt den Satz von Pascal um in den Satz von Brianchon, der besagt, dass die 3 Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten eines in einen

Kreis eingeschriebenen Sechsecks kollinear sind. Bei dieser Herleitung kann man wohl sagen, dass der Weg das Ziel ist! Für weitere solche Wege empfehle ich die Lektüre des Buches: Anschauliche Geometrie von Hilbert und Cohn-Vossen.







Die Figuren haben wir mit DRGENIUS,
`http://packages.debian.org/unstable/math/drgenius.html/`, gemacht.