Prof. N. A'Campo Wintersemester 2002/03

Lesungen am runden Tisch

Freitag, den 20. Dezember 2002

Zu Weihnachten wünsche ich Ihnen nicht nur sphärische, sondern auch ebene und hyperbolische Schmuckstücke am Weihnachtsbaum 2002!

Betrachte auf $\mathbb{R}^3$ die Familie $(q_t)_{t\in[-1,1]}$ von quadratischen Formen: $q_t(p) := tx(p)^2 + ty(p)^2 + z(p)^2, p \in \mathbb{R}^3$. Die Bilinearform zu q_t ist durch

$$Q_t(p,q) := \frac{1}{2}[q_t(p+q) - q_t(p) - q_t(q)] =$$

$$tx(p)x(q) + tx(p)y(q) + z(p)z(q)$$

gegeben. Für $t \in [-1,1]$ sei I_t die Zusammenhangskomponente der Identität in der Isometriegruppe von $(\mathbb{R}^3, q_t)$. Für $t = 0$ ist I_t die Matrixgruppe $I_0 := \{A \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \mid A_{3,1} = A_{3,2} = 0, A_{3,3} = 1, \det(A) > 0\}$. Also ist I_0 isomorph zu der topologischen Gruppe aller orientierten Bewegungen der affinen reellen Ebene. Für $t > 0$ ist I_t isomorph zu der topologischen Gruppe aller orientierten Bewegungen der Euklidischen Sphäre.

Die Gruppe I_0 werden wir verkleinern. Ein $A \in I_0$ heisst *kohärent*, wenn rationale Funktionen $a_{i,j}(t), 1 \leq i,j \leq 3$, existieren, derart dass für $t \in [-1,1]$ die Matrix $A_t := (a_{i,j}(t))$ ein Element aus I_t darstellt und $A_0 = A$ gilt. Allgemeiner heisst ein $A \in I_s, s \in [-1,1]$, *kohärent*, wenn eine rationale Familie $A_t = (a_{i,j}(t))$ mit $A_t \in I_t$ und $A_s = A$ existiert.

Die Gruppe I_0 fällt auf, es gilt zum Beispiel: ist $A \in I_0$ kohärent, dann folgt $\det(A) = 1$, da $t \mapsto \det(A_t)$ stetig ist und für $t \neq 0$ stets $\det(A_t) = 1$ ist.

Fakt 1. Alle $A \in I_s, s \neq 0$ sind kohärent. Ein $A \in I_0$ ist genau dann kohärent, wenn A eine orientierte Bewegung der Euklidischen Ebene $\{(x,y,1) \mid x,y \in R^2\}$ ist.

Wir definieren neu die Gruppe I_t als die Untergruppe aller kohärenten Elemente. Gruppen I_t und I_s sind genau dann isomorph, wenn $ts > 0$ oder $t^2 + s^2 = 0$ ist.

Die Euklidische ebene Geometrie lässt sich aus der topologischen Gruppe I_0 rekonstruieren: man nehme als Punktmenge die Menge E aller maximalen kommutativen kompakten Untergruppen in I_0. Für $p \in E$ existiert in der Untergruppe $p \subset I_0$ genau ein Element s_p der Ordnung 2. Wir nennen $s_p \in I_0$ die Punktspiegelung mit Zentrum p. Eine Gerade ist eine maximale Teilmenge L in E derart, dass Produkte gerader Länge von Punktspiegelungen $s_p, p \in L$, in I_0 eine kommutative Untergruppe erzeugen. Die Gruppe I_0 wirkt via Konjugation auf E und bildet Geraden auf Geraden ab.

Da zwei maximale kommutative kompakte Untergruppen p, q in I_0 eindeutig konjugiert sind (d.h.: ein $\gamma \in I_0$ mit $\gamma p = q\gamma$ ist bis auf Multiplikation von rechts mit Elemente aus p und Multiplikation von links mit Elemente aus q

eindeutig), erhalten wir eine Orientierung für E und auch eine Winkelmessung. Nach Eichung erhalten wir eine Distanz.

Frage 2. Definiere Punkte und Geraden mittels $I_t, t > 0$. Welche Geometrie erhält man aus I_t? In $I_t, t > 0$, bilden die maximale kommutative kompakte Untergruppen eine Konjugationsklasse.

Fakt 3. Die Geometrie E_t zu $I_t, t > 0$, hat eine natürliche Eichung: wir erklären für $A \in E_t$ als *Äquator von* A die Menge aller $B \in E_t$, für die die Bahn von A unter B für die Wirkung von I_t auf E_t eine Gerade ist. Wir eichen die Distanz von $A \in E_t$ zum eigenen Äquator auf $\frac{\pi}{2\sqrt{t}}$. Die Punktmenge der Geometrie E_t zu $I_t, t > 0$, kann man sich vorstellen als die Menge der ungeordneten Paare von antipodalen Punkten der Einheitssphäre im Euklidischen 3-dimensionalen Raum (R^3, q_t).

Sei K_t für $t \in [-1, 1]$ die Standgruppe von $a := (0, 0, 1) \in R^3$. Die Gruppe ist für $t \in [-1, 1]$ eine maximale kommutative Untergruppe in I_t und definiert somit eine kohärente Punktfamilie $A_t \in E_t, t \in [-1, 1]$. Für $x \in R$ seien $B^x_t \in E_t, t \in [0, 1]$, und $C^x_t \in E_t, t \in [0, 1]$ die kohärenten Punktfamilien, die als Standgruppenfamilien in I_t der Vektoren $b^x := (x, 0, 1), c^x := (0, x, 1)$ erklärt sind. Die Familie $\Delta_t(x, y) := (A_t, B^x_t, C^y_t), t \in [0, 1]$, ist eine kohärente Familie von Dreiecken. Das Dreieck $\Delta_0(x, y)$ ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenverhältnis x/y.

Frage 3. Formuliere für $t \in [0, 1]$ ein kohärentes Gesetz, das für $t = 0$ dem Satz von Pythagoras entspricht. Hinweise: Die Winkeldistanz von A_t zu B^x_t und gemessen mit $q_t, t > 0$, beträgt

$$w_t(A_t, B^x_t) = \arccos(\frac{Q_t(a, b^x)}{\sqrt{q_t(a)q_t(b^x)}}) =$$

$$\arccos(\frac{1}{\sqrt{tx^2 + 1}}) = |\mathrm{argtg}(\sqrt{t}x)| = |\sqrt{t}x - \frac{1}{3}\sqrt{t^3}x^3 + \frac{1}{5}\sqrt{t^5}x^5 - \cdots|$$

und somit ist nach unserer Eichung die Distanz in E_t durch

$$D_t(A_t, B^x_t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \arccos(\frac{1}{\sqrt{tx^2 + 1}}) = |x - \frac{1}{3}tx^3 + \frac{1}{5}t^2x^5 - \cdots|$$

gegeben.

Bemerkenswert ist, dass der Grenzübergang für $t \to 0, t > 0$, in $D_t(A_t, B^x_t)$ schlicht $|x|$ liefert. Wir erklären also die Distanz in der Geometrie E_0 von A_0 nach B^x_0 gleich $|x|$.

Für $x, y \in R$ fest und $t > 0$ gilt im Dreieck $\Delta_t(x, y)$ das Gesetz:

$$\cos(\sqrt{t}D_t(A_t, B^x_t)) \cos(\sqrt{t}D_t(A_t, C^y_t)) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{tx^2 + 1}\sqrt{ty^2 + 1}} = \cos(\sqrt{t}D_t(Cy_t, B^x_t))$$

Der Grenzübergang für $t \to 0, t > 0$, liefert das sehr erprobte, aber nicht aufschlussreiche Gesetz

$$1.1 = 1.$$

Eine Renormalisierung liefert das Gesetz:

$$\sqrt{t}[1 - \cos(\sqrt{t}D_t(A_t, B_t^x))\cos(\sqrt{t}D_t(A_t, C_t^y))] =$$

$$\sqrt{t}[1 - \cos(\sqrt{t}D_t(Cy_t, B_t^x))]$$

Der Grenzübergang für $t \to 0, t > 0$, liefert nach dieser Renormalisierung

$$D_0(A_0, B_0^x)^2 + D_0(A_0, C_0^y)^2 = D_0(B_0^x, C_0^y)^2,$$

also den Satz von Pythagoras der Geometrie E_0!

Frage 4. Was passiert für $t < 0$? Hinweise: Die Standgruppe von $(x, 0, 1)$ in $I_t, t \in [-1, 0[$ ist abelsch und dazu noch kompakt, wenn $tx^2 + 1 > 0$ gilt. Also erhalten wir wie vorher eine kohärente Familie von Dreiecken $\Delta_t(x, y) := (A_t, B_t^x, C_t^y), t \in [-1, 1]$, wenn $tx^2 + 1 > 0$ und $ty^2 + 1 > 0$ gelten.

Es passiert ein Wunder. Der Ausdruck

$$D_t(A_t, B_t^x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \arccos(\frac{1}{\sqrt{tx^2 + 1}})$$

liefert für $t \in [-1, 0[$ eine positive reelle Zahl, die wir als Distanz in der Geometrie E_t von A_t nach B_t interpretieren.

Wir schauen mal etwas genauer hin. Da $\frac{1}{\sqrt{tx^2+1}} > 1$, ist $\arccos(\frac{1}{\sqrt{tx^2+1}})$ rein imaginär und $D_t(A_t, B_t^x)$ wird reell und positiv sein, wenn wir von $\sqrt{t}$ und $\arccos(\frac{1}{\sqrt{tx^2+1}})$ passende Zweige nehmen. Wir könnten statt $\arccos(\frac{1}{\sqrt{tx^2+1}})$ den Ausdruck $\operatorname{argcosh}(\frac{1}{\sqrt{tx^2+1}})$ und statt $\sqrt{t}$ den Ausdruck $\sqrt{-t}$ nehmen.
Bedenke $\cos(iv) = \cosh(v) = \frac{1}{2}(e^v + e^{-v})$ und dass $\operatorname{argcosh} : u \in [1, +\infty] \mapsto v = \log(u + \sqrt{u^2 - 1}) \in [0, +\infty]$ die Umkehrfunktion von $u = \cosh(v)$ ist.

Wir erhalten für die Geometrie $E_t, t < 0$, als Satz von Pythagoras:

Für $x, y \in R$ fest mit $tx^2 + 1 > 0, ty^2 + 1 > 0$ und $-1 \leq t < 0$ gilt im Dreieck $\Delta_t(x, y)$ den Satz:

$$\cosh(\sqrt{-t}D_t(A_t, B_t^x))\cosh(\sqrt{-t}D_t(A_t, C_t^y)) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{tx^2 + 1}\sqrt{ty^2 + 1}} = \cosh(\sqrt{-t}D_t(Cy_t, B_t^x))$$

Fassen wir zusammen: in einem rechtwinkligen Dreieck mit Kathetenlängen x, y und Hypothenuse der Länge z, gilt in der hyperbolischen Geometrie E_{-1} das Gesetz:

$$\cosh(z) = \cosh(x)\cosh(y),$$

in der Euklidischen Geometrie E_0 das Gesetz:

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

und in der sphärischen Geometrie E_1 das Gesetz:

$$\cos(z) = \cos(x)\cos(y).$$

Wenn die Kanten mit Längen x, y eines Dreiecks einen Sektor mit Winkel γ beranden, dann gelten in den Geometrien E_{-1}, E_0, E_1 die Gesetze:

$$E_{-1}: \ \cosh(z) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)\cos(\gamma),$$
$$E_0: \ z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\gamma),$$
$$E_1: \ \cos(z) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\cos(\gamma).$$

Da ein Winkel eines Dreiecks in $[0, \pi]$ liegt und die cos-Funktion auf $[0, \pi]$ injektiv ist, folgt, dass in den Geometrien E_{-1}, E_0, E_1 die 3 Längen eines Dreiecks die 3 Winkel des Dreiecks bestimmen. Bemerkenswert ist, dass in den Geometrien E_{-1}, E_1 auch umgekehrt die 3 Winkel eines Dreiecks die 3 Längen bestimmen.

Fakt 4. In der hyperbolischen Geometrie E_{-1} existieren rechtwinklige Sechsecke. Seien die Kantenlängen in der natürlichen zyklischen Reihenfolge x, Z, y, X, z, Y. Es gelten dann die Gesetze:

$$\cosh(z) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)\cosh(Z),$$
$$\cosh(y) = \cosh(x)\cosh(z) - \sinh(x)\sinh(z)\cosh(Y),$$
$$\cosh(x) = \cosh(z)\cosh(y) - \sinh(z)\sinh(y)\cosh(X).$$

Es folgt, dass die 3 Längen x, y, z eines rechtwinkligen Sechsecks die 3 Längen X, Y, Z bestimmen.

Eine umfangreiche Sammlung von Büchern und Dokumenten über hyperbolische Geometrie wurde von Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) zusammengetragen. Diese Sammlung ist auf dem Estrich seiner Villa, Auravägen 17, S-182 60 Djursholm, Sweden, die nun das Mittag-Leffler Institut ist, zugänglich. Ich kann zum Beispiel für Weihnachten diese Lektüre und den Aufenthalt am Institut sehr empfehlen. Möchten Sie Weihnachten anderswo verbringen, dann empfehle ich:

Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry*, New Dover Edition 1955, Dover Publications, Inc.

und im Anhang die Übersetzungen durch Dr. George Bruce Halsted von

John Bolyai, *The Science of Absolute Space*,

und

Nicholas Lobachevski, *The Theory of Parallels.*