Prof. N. A'Campo Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $< r < 1$ und $R > r+1$ sei $G_{R,r}$ das orientierte Gebiet $G_{R,r} := \{p \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(p) \geq 0, |p| \leq R, |p-i| \geq r\}$. Berechne das Wegintegral:

$$\int_{\partial G_{R,r}} \frac{dz}{1+z^2}$$

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Schliesse

$$\int_{\partial B(i,r)} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}$$

wobei $\gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ der Weg $\gamma_R(t) := Re^{it}$ ist.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Zeige, dass das Integral

$$I_{p,r} = \int_{\partial B(i,r)} \frac{dz}{1+z^2}, 0 < r < 1,$$

nicht von r abhängt. Zeige, $I_{p,r} = \pi$.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Zeige, dass die Grenzwerte

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2}$$

und

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2}$$

existieren.

Aufgabe 5. Zeige $\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Aufgabe 6. Berechne $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Aufgabe 7. Berechne $\sin(\pi)$. Bestimme ein $R \in \mathbb{R}, R > 0$, und schreibe lokal um $0 \in \mathbb{C}$ die Funktion $f : p \in B(0,R) \mapsto f(p) = \sin(\pi \cos(z(p))) \in \mathbb{C}$ als $f(p) = Az(p)^k g(z(p))$ wobei $A \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ und $g : B(0,R) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(0) = 1, |g(p)| \geq \frac{1}{2}$ ist.

Aufgabe 8. (Fortsetzung). Berechne das Wegintegral

$$\int_{\partial B(0,R)} \frac{f'(z)dz}{2\pi i f(z)}$$