Prof. N. A'Campo Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Berechne $d''d'\log(z\bar{z})$.

Aufgabe 2. Für $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ sei $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_r(t) := r(\cos(t) + i\sin(t))$. Berechne die Wegintegrale $\int_{\gamma_r} dz$, $\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z}$, $\int_{\gamma_r} \frac{\bar{z}dz}{z}$.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Ist $I_r := \int_{\gamma_r} \frac{df(z)}{z}, r > 0$, unabhängig von r? Berechne $\lim_{r\to 0, r>0} I_r$.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar und 2π-periodisch. Für $n \in \mathbb{Z}$ bezeichnet $a_n := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)dt$ den n-te Fourierkoeffizient von f. Zeige, dass die Menge $\{a_n(n^2 + 1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ beschränkt ist.

Aufgabe 5. Sei T der Einheitskreis $T := \{p \in \mathbb{C} \mid |p| = 1\}$. Wir definieren die Funktion $g : T \to \mathbb{C}$ durch $g(e^{it}) = f(t), t \in \mathbb{R}$. Seien $T^+ := \{p \in \mathbb{C} \mid |p| \leq 1\}$ und $T^- := \{p \in \mathbb{C} \mid |p| \geq 1\}$. Zeige, dass $G^+(p) := \sum_{n>0} a_n z(p)^n$ eine stetige Funktion auf T^+ definiert. Zeige, dass G^+ auf $D := \{p \in \mathbb{C} \mid |p| < 1\}$ holomorph ist. Zeige, dass $G^-(p) := \sum_{n<0} a_n z(p)^n$ eine stetige und beschränkte Funktion auf T^- definiert, die auf $\{p \in \mathbb{C} \mid |p| > 1\}$ holomorph ist.

Aufgabe 6. Zeige, dass $G^+ + G^- - g$ auf T konstant ist.

Aufgabe 7. Zeige, dass $G(p) := \sum_{n>0} z(p)^{n!}$ auf D eine holomorphe Funktion definiert. Lässt G sich für ein $p \in T$ stetig auf $D \cup \{p\}$ erweitern?

Aufgabe 8. Bestimme die Nullstellen der Funktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.