Prof. N. A'Campo Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis I

11. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}^n$ eine holomorphe Abbildung. Wir nehmen an, dass das Differential von f an einer Stelle $p \in U$ den reellen Rang $2n$ hat. Nun hat f lokal um p eine differenzierbare Umkehrabbildung. Zeige, dass diese Umkehrabbildung holomorph ist.

Aufgabe 2. Sei $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Kurve $\gamma(t) = (t^3, t^2)$. Zeige, dass γ an der Stelle $t = 0$ lokal injektiv ist. Ist das Bild von γ lokal an der Stelle $\gamma(0)$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{C}^2$?

Aufgabe 3. Zeige, dass die Teilmenge $X := \{p \in \mathbb{C}^2 \mid x(p)^3 - y(p)^2 - 1 = 0\}$ eine differenzierbare, sogar eine holomorphe Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{C}^2$ ist. Hier sind $x, y : C^2 \to \mathbb{C}$ die Koordinatenfunktionen zu der Basis $e_1 := (1, 0), e_2 := (0, 1)$.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Studiere die Abbildung

$$x : X \to \mathbb{C}, p \in X \mapsto x(p) \in \mathbb{C}$$

Wieviele Uhrbilder hat ein $a \in \mathbb{C}$ in X? Ist X homöomorph zu einer Ebene? Bestimme $X_r := \{p \in X \mid |x(p)| \leq r, r \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Zeige, dass X homöomorph zu $S^1 \times S^1 \setminus \{(1, 1)\}$ ist. Hier ist $S^1 := \{\theta \in \mathbb{C} \mid |\theta| = 1\}$ den Einheitskreis in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 6. Sei $c : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^2$ die Abbildung $\in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto (z, \frac{1}{z}) \in \mathbb{C}^2$. Zeige, dass c eine holomorphe Parametrizierung der holomorphe Untermannigfaltigkeit $F := \{p \in \mathbb{C}^2 \mid x(p)y(p) = 1\}$ in $\mathbb{C}^2$ ist.

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Sei $K := \{p \in \mathbb{C}^2 \mid x(p)y(p) = 0\}$. Für $p \in F$ sei R_p das Minimum von $||p - q||, q \in F$ wobei $||\,||$ auf $\mathbb{C}^2$ die Norm $||h|| :=$ Maximum$(|x(h)|, |y(h)|)$, die Norm $||h|| := |x(h)| + |y(h)|$ oder die Norm mit $||h||^2 := |x(h)|^2 + |y(h)|^2$ ist. Berechne das Maximum von $R_p, p \in K$.