Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2009

Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Konstruiere auf $H := \{p \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(p) > 0\}$ eine holomorphe Funktion f mit $f^2 = z$. Ist f eindeutig bestimmt? Bestimme Bild(f). Konstruiere eine biholomorphe Funktion $\phi_U : D \to U$, wobei die offene Einheitscheibe in $\mathbb{C}$ ist, und $U := \{p \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(p) > 0, \mathrm{Im}(p^2) > 0\}$ ist. Bestimme alle biholomorphe Funktionen $\phi : U \to D$.

Aufgabe 2. Für $t \in]0,1]$, sei $U_t := \{p \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(p) > 0, \mathrm{Im}(e^{t\pi i}p) > 0\}$. Konstruiere eine biholomorphe Funktion $\phi : U_t \to D$.

Aufgabe 3. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und injektiv. Wir nehmen an, dass γ auf das Komplement einer endlichen Teilmenge E in $\mathbb{R}$ einmal differenzierbar ist, so, dass $\dot\gamma$ auf $\mathbb{R} \setminus E$ lokal konstant ist. Sei $U_\gamma \subset \mathbb{C}$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\gamma)$. Konstruiere eine biholomorphe Funktion $\phi : U_\gamma \to D$.

Aufgabe 4. Sei $D^* := \{p \in D \mid p \neq 0\}$ die Punktierte Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Eine holomorphe Funktion auf D^* wird auch holomorphe Funktion auf D mit Singularität in $0 \in D$ genannt. Sei zum Beispiel $f : D^* \to \mathbb{C}$ durch $f = e^{1/z}$ gegeben. Bestimme für $r \in]0,1]$ das Bild $f(D_r^*), 0 < r < 1$ wobei $D_r^* := \{p \in \mathbb{C} \mid 0 < |p| < r\}$ ist. Berechne: $\cap_{r \in]0,1]} f(D_r^*)$.

Aufgabe 5. Sei $g = \frac{1}{e^z - 1}$. Bestimme für $r \in]0,1]$ das Bild $g(D_r^*), 0 < r < 1$. Berechne: $\cap_{r \in]0,1]} g(D_r^*)$.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Schreibe f, Aufgabe 4, und g, Aufgabe 5 auf D^* als Potenzreihe, auch mit negativen Potenzen, in z.