Übungen zur Vorlesung komplexe Analysis

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Berechne df, $d'f$, $d''f$ für $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, p \in \mathbb{C}^2 \mapsto (z_1(p)^3 - z_2(p)^2)^2 - z_1(p)^5 z_2(p)$. Berechne Δf und $d'd''f$.

Aufgabe 2. Sei $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ eine komplexe Potenzreihe. Wir definieren das *log-Wachstum* $w \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ der Reihe als $w := \lim -\text{superior}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(|a_n|)$. Berechne das log-Wachstum der Reihen $\Sigma_{n\in\mathbb{N}}(n!)^s z^n, s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ eine komplexe Potenzreihe mit log-Wachstum w. Sei $R \in \mathbb{R}, R > 0$ mit $Re^w < 1$. Zeige, dass $f = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine holomorphe Funktion auf $D_R := \{p \in \mathbb{C} \mid |p| < R\}$ definiert. Was passiert für R mit $Re^w > 1$?

Aufgabe 4. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $\mathrm{FR}(f)$ die Fourierreihe von f. Wir erhalten nun zwei Potenzreihen: $H_f := \Sigma_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{FR}_n(f) z^n, \bar{H}_f := \Sigma_{n\in\mathbb{N}, n>0} \mathrm{FR}_n(f) \bar{z}^n$. Zeige, dass die Potenzreihen H_f und $\bar{H}_f$ auf $D := D_1$ eine holomorphe Funktion H_F und eine anti-holomorphe Funktion $\bar{H}_F$ definieren.

Aufgabe 5. Zeige, dass die Funktion $H_F + \bar{H}_F$ auf D harmonisch ist.

Aufgabe 6. Zeige, dass die Funktion $H_F + \bar{H}_F$ auf D sich stetig auf den Abschluss $\bar{D}$ von D in $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt. Sei $F : \bar{D} \to \mathbb{C}$ diese Fortsetzung. Für $p = e^{2\pi i t} \in \partial\bar{D} := \bar{D} \setminus D, t \in \mathbb{R}$ gilt $F(p) = f(t)$.

Aufgabe 7. Die Potenzreihe $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^3} z^n$ definiert auf $\bar{D}$ eine stetige Funktion F. Wie oft ist die Funktion $f(t) := F(e^{2\pi i t}, t \in \mathbb{R}$, differenzierbar? Stelle für die Funktion f eine Differentialgleichung auf.

Aufgabe 8. Berechne das log-Wachstum w der Fibonacci Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass die Potenzreihe $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} f_n z^n$ auf $D_R, 0 < Re^w < 1$, eine f holomorphe Funktion definiert, die sich holomorph auf $\mathbb{C} \setminus G$ fortsetzen lässt, wobei $\#G = 2$ gilt.