Prof. N. A'Campo Herbstsemester 2009

Vorbereitung zur Vorlesung komplexe Analysis

Seien V und W endlich dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. Wir notieren die Normen mit $|| \, ||_V$ und $|| \, ||_W$. Sei $U \subset V$ eine offene Teilmenge.

Eine Funktion f auf U ist eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$. Ein Vektorfeld auf U ist eine Abbildung $X : U \to V$. Eine 1-Differentialform auf U ist eine Abbildung $\omega : U \to V^*$. Hier haben wir mit V^* den Dualraum von V notiert. Ein Element $L \in V^*$ ist eine Linearform auf V, also L ist eine lineare Abbildung $L : V \to \mathbb{R}$. Auf V^* arbeiten wir mit der Operatornorm: $||L||_{V^*} := \text{Supremum}|L(u)|, ||u||_V \leq 1$. Es gilt die Abschätzung $|L(u)| \leq ||L||_{V^*}||u||_V$.

Funktionen, Vektorfeldern, 1-Differentialformen auf U sind also Abbildungen oder anders gesagt, Zuordnungen $p \in U \mapsto \cdots$. Zum Beispiel, eine 1-Differentialform ω auf U ist eine Zuordnung $p \in U \mapsto \omega_p \in V^*$.

Eine Abbildung $\phi : U \to W$ heisst differenzierbar, wenn an jeder Stelle $p \in U$ eine Driegliedentwicklung von $\phi(p+h)$ existiert. Genauer es gilt die DGE:

$$\phi(p+h) = \phi(p) + A(h) + \text{Rest}_{p,f}(h), h \in V, p+h \in U,$$

wobei A eine lineare Abbildung $A : V \to W$ ist und wobei für $p \in U$ fest, der Term $\text{Rest}_{p,f}(h)$ relativ zu $||h||_V$ klein ist, d.h. für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, existiert ein $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, derart, dass für alle $h \in V$ mit $p+h \in U$ und mit $||h||_V < \delta$ die Abschätzung $|\text{Rest}_{p,f}(h| \leq \epsilon||h||_V$ zutrifft. Die lineare Abbildung A dieser DGE ist eindeutig, und wird mit $(Df)_p : V \to W$ notiert, und mit *Differential von f an der Stelle p* benannt.

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf U, dann ist die Zuordnung $p \in U \mapsto (Df)_p \in V^*$ eine 1-Differentialform. Diese Differentialform heisst Differential von f und wird mit df notiert.

Beispiel: Sei $U = V$ und sei $e_1, e_2, \cdots, e_n$ eine Basis des Vektorräumes V. Seien $x_1, x_2, \cdots, x_n : V \to \mathbb{R}$ die Funktionen, die eindeutig von der Entwicklung von $p \in V$ als Linearkombination bezüglich der Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$ bestimmt sind:

$$p = x_1(p)e_1 + x_2(p)e_2 + \cdots + x_n(p)e_n, p \in V$$

Die Funktionen $x_1, \cdots, x_n$ sind auch Linearformen auf V, also $x_1, x_2, \cdots, x_n \in V^*$.

Beispiel: Jede 1-Differentialform ω auf U lässt sich schreiben als:

$$\omega = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \cdots + a_ndx_n$$

wobei $a_1, a_2, \cdots, a_n$ Funktionen auf U sind.

Beispiel: schreibe df als $df = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \cdots + a_ndx_n$. Stelle folgendes fest: für $p \in U$ gilt $a_i(p) = (Df)_p(e_i), i = 1 \cdots n$.

Frage: welche 1-Differentialformen ω auf U haben lokal, oder global, eine Stammfunktion, d.h. welche lassen sich als df für eine Funktion f auf U schreiben?

Eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion, derart, dass $df : U \to V^*$ stetig ist. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : U \to W$ ist eine differenzierbare Abbildung, derart, dass $df : U \to \mathrm{Hom}(V, W)$ stetig ist.

Das Differential $(Df)_p$ einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : U \to W$ bestimmt das lokale Verhalten an einer Stelle $p \in U$ von f, wenn gilt: $\mathrm{Rang}((Df)_p) = \mathrm{Minimum}\{\mathrm{Dimension}(V), \mathrm{Dimension}(W)\}$. Beschreibe nun ausführlich diese Tatsache!

Blatt "0" wird fortgesetzt.