Prof. N. A'Campo Fruehlingssemester 2008

Übungen zur Vorlesung Infini II

9. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Wir nehmen an, dass die zweite Ableitung $f'':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist. Sei $K\in\mathbb{R}$ eine Schranke für $|f''|$. Sei

$$f(p+h)=f(p)+f'(p)h+\mathrm{Rest}(f,p,h)$$

die Dreigliedentwicklung von f an der Stelle $p\in\mathbb{R}$. Zeige für $p\in\mathbb{R},h\in\mathbb{R}$ die Abschätzung $|\mathrm{Rest}(f,p,h)|\leq\frac{1}{2}Kh^2$. Hinweis:

$$\mathrm{Rest}(f,p,h)=\int_p^{p+h}(f'(t)-f'(p))dt=\int_p^{p+h}(\int_p^t f''(s)ds)dt$$

Aufgabe 2. Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Funktion mit $g(t)=0,|t|>1$ und mit $g(t)=\frac{1}{2}\cos(t\pi)+1,|t|\leq 1$. Zeige, dass g differenzierbar ist. Zeige, dass für die Restglieder $\mathrm{Rest}(g,p,h)$ der Dreigliedentwicklung für g gelten:

$$|\mathrm{Rest}(g,p,h)|\leq h^2$$

Aufpassen: ist g'' stetig und beschränkt?

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Für $\lambda\in\mathbb{R},\lambda>0$, sei $g_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Funktion mit $g_\lambda(t):=\lambda g(\lambda t)$. Zeige, dass für die Restglieder $\mathrm{Rest}(g_\lambda,p,h)$ der Dreigliedentwicklung für g_λ gelten:

$$|\mathrm{Rest}(g_\lambda,p,h)|\leq\lambda^2h^2$$

Aufgabe 4. (Fortzetzung). Zeige $\int_{-\infty}^{+\infty}g_\lambda(t)dt=1$. Zeige $g_\lambda(t)=0$ für $|t|>\frac{1}{\lambda}$.

Aufgabe 5. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante k. Für $\lambda>0$ setze $f_\lambda:=g_\lambda*f$. Zeige, dass f_λ differenzierbar ist. Zeige für die Restglieder der Dreigliedentwicklungen von f_λ die Abschätzung $|\mathrm{Rest}(f_\lambda,p,h)|\leq\lambda^2h^2$.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Für $\lambda>0$ ist f_λ eine Approximation von f. Genauer, zeige: $\mathrm{Supremum}_{t\in\mathbb{R}}|f_\lambda(t)-f(t)|\leq\frac{k}{\lambda}$. Bemerkenswert ist, dass f nach Voraussetzung nur Lipschitzstetig ist, aber beliebig genau mit differenzierbaren Funktionen f_λ approximiert wird. Zeige: $|f'_\lambda|\leq k$ und dass die Funktion f_λ Lipschitzstetig mit Konstante k sind.

Aufgabe 7. Suche eine Anwendung im Bereich der plastischen Chirurgie, der Bildverarbeitung oder des Tonstudios.