Prof. N. A'Campo Fruehlingssemester 2008

Übungen zur Vorlesung Infini II

8. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei E die Euklidische Ebene. Also stellen wir uns E vor als $E = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt $< u, v >_{\text{Eukl.}} := x(u)y(u) + x(v)y(v), u, v \in E$. Für $A \in E$ sei $f_A : E \to \mathbb{R}$ die Funktion $f_A(u) := ||u - A||^2_{\text{Eukl.}} \in \mathbb{R}$. Für $A, B \in E$ bestimme ein Vektorfeld $X : E \to E$ derart, dass für alle $u, h \in E$ gilt:

$$(D(f_A + f_B))_u(h) =< X_u, h >_{\text{Eukl.}}$$

Hat die Funktion $f_A + f_B : E \to \mathbb{R}$ ein Minimum? Wo?

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Seien $A, B, C \in E$. Hat die Funktion $f_A + f_B + f_C : E \to \mathbb{R}$ ein Minimum? Wo? Wo im Dreieck $\Delta(A, B, C)$?

Aufgabe 3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension. Sei $\text{End}(V)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen $A : V \to V$. Wir betrachten die Funktion Determinante $\text{Det} : \text{End}(V) \to \mathbb{R}$. Bestimme das Differential der Funktion Determinante an der Stelle $\text{Id}_V \in \text{End}(V)$. Hinweis: das Ergebniss der Aufgabe 4 und der Hinweis der Aufgabe 4 sind ein Hinweis für Aufgabe 3.

Aufgabe 4. (Fortzetzung). Sei $A \in \text{End}(V)$ mit $\text{Det}(A) \neq 0$. Zeige:

$$(D\text{Det})_A(H) = \text{Det}(A)\text{Spur}(A^{-1}H), H \in \text{End}(V)$$

Hinweis:$\text{Det}(A + H) = \text{Det}(A)\text{Det}(\text{Id}_V + A^{-1}H)$.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Sei $A \in \text{End}(V)$. Sei $X : \text{End}(V) \to \text{End}(V)$ das Vektorfeld $X_H = AH$. Zeige, dass die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \text{End}(V), \gamma(t) = \exp(tA) \in \text{End}(V)$ eine Lösungskurve der Differentialgleichung zum Vektorfeld X ist.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Zeige für $A \in \text{End}(V)$ mit $\text{Spur}(A) = 0$, dass die Funktion $t \in \mathbb{R} \mapsto \text{Det}(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$ konstant gleich 1 ist.

Aufgabe 7. Sei A die 7×7-Matrix mit $a_{n,m} = 7^{n-m} \sin(\pi(n+m)/7)$. Berechne $\text{Det}(e^A)$.