Prof. N. A'Campo Fruehlingssemester 2008

Übungen zur Vorlesung Infini II

7. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $I : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ das Vektorfeld $I(u) := iu$. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Lösungskurve der Differentialgleichung zu I mit $\gamma(0) = 1 \in \mathbb{C}$. Wieso gibt es genau eine Lösungskurve mit $\gamma(0) = 1$? Zeige, dass $\gamma_1(t) := e^{it} := \sum_{n\in\mathbb{N}}(-i)^n \frac{t^n}{n!}$ und $\gamma_2(t) := \cos(t) + i\sin(t)$ Lösungskurven sind. Schliesse:

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \mathrm{Re}(e^{it})$$

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{it})$$

Aufgabe 2. Sei $m_{2,3} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Abbildung $m_{2,3}(u) = u^2\bar{u}^3$. Zeige, dass die Abbildung $m_{2,3}$ differenzierbar ist. Berechne das Differential.

Aufgabe 3. Sei $P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, n \in \mathbb{N}, n > 0$, ein Polynom mit Koeffizienten $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Sei $A := \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{n-1}|\}$. Zeige für $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| \geq R := 1 + |P(0)| + nA$ die Abschätzung $|P(u)| \geq 1 + |P(0)|$.

Aufgabe 4. (Fortzetzung). Zeige, die Existenz von $v \in \mathbb{C}$ mit $|v| \leq R$ und $|P(v)| = \mathrm{Infimum}_{u\in\mathbb{C}}|P(u)|$. Hinweis: Die Abbildung $u \in \mathbb{C} \mapsto |P(u)| \in \mathbb{R}$ ist stetig und in $\{u \leq \mathbb{C} | |u| \leq R\}$ hat jede Folge eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 5. (Fortsetzung) Zeige: $P(v) = 0$. Hinweis. Schreibe $P(v + h) = P(v) + bh^k + b_{k+1}h^{k+1} + \cdots + b_n h^n$ wobei $k \in \mathbb{N}, k > 0, b \in C, b \neq 0, b_{k+1}, \cdots, b_n \in \mathbb{C}$ sind. Setze $B = \sum_{j=k+1}^{n} |b_j|$. Wäre $P(v) \neq 0$, wähle dann $h \in \mathbb{C}, |h| \leq 1$, mit $2|bh^k| \leq |P(0)|$ und $2B|h| \leq |b|$. Man erhielte dann einen Widerspruch, nämlich $|P(v + h)| < |P(v)|$.

Aus Aufgaben $3, 4, 5$ folgt den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 6. Zeige, dass $P(t) = t^{10} + t^9 - t^7 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1$ eine Nullstelle $v \in [\frac{58}{50}, \frac{59}{50}]$ hat.