Prof. N. A'Campo Fruehlingssemester 2008

Übungen zur Vorlesung Infini II

5. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir $\exp(t) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Hinweis: Für $t, h \in \mathbb{R}$ setze eine Dreigliedentwickelung an.

$$\exp(t+h) = \exp(t) + h\exp(t) + \mathrm{Rest}(t,h)$$

Schätze für $|h| \leq 1$ das Restglied ab. Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, t, h \in \mathbb{R}, |h| \leq 1$, gilt

$$|(t+h)^n - t^n - nht^{n-1}| \leq h^2(|t|+1)^n$$

und nun folgt

$$|\mathrm{Rest}(t,h)| \leq |h|^2 \exp(|t|+1)$$

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Gelten die Abschätzungen der Aufgabe 1 für $z, h \in \mathbb{C}$ statt für $t, h \in \mathbb{R}$? Definiere mit einer Reihe $\exp^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ist die Abbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto \exp^{\mathbb{C}}(z) \in \mathbb{C}$ differenzierbar?

Aufgabe 3. Sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension. Wir bezeichnen mit $|| \, ||_V$ die Norm auf V. Sei $E := \mathrm{End}(V)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen $T : V \to V$. Auf E erklären wir die Norm:

$$||T||_E := \mathrm{Supremum}_{u \in V, u \neq 0} \frac{||T(u)||_V}{||u||_V}$$

Zeige für $T, S \in E$ die Abschätzung $||T \circ S||_E \leq ||T||_E ||S||_E$. Zeige, dass die Abbildungen $T \in E \mapsto T^n \in E, n \in \mathbb{N}$, differenzierbar sind. Berechne die Differentiale. Aufpassen: $(T+H)^2 = T^2 + T \circ H + H \circ T + H^2 \neq T^2 + 2T \circ H + H^2$.

Aufgabe 4. Sei $P : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ die Abbildung $P(T) = T^3, T \in \mathrm{End}(V)$. Zeige für $T, H \in \mathrm{End}(V)$:

$$(DP)_T(H) = H \circ T \circ T + T \circ H \circ T + T \circ T \circ H$$

Sei $\{T, H\}_n$ die Summe in $\mathrm{End}(V)$ aller $\circ$-Wörter der Länge n mit $(n-1)$ mal T und 1-mal H. Also, $(DP)_T(H) = \{T, H\}_3$. Berechne das Differential der Abbildung $Q : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V), Q(T) = T^7$.

Aufgabe 5. Wir definieren $\exp^{\mathrm{End}} : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ mit

$$T \in \mathrm{End}(V) \mapsto \exp^{\mathrm{End}}(T) := \mathrm{Id}_V + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \in \mathrm{End}(V)$$

Gelten die Abschätzungen wie in den Aufgaben 1 und 2 nun noch? Ist die Abbildung $\exp^{\mathrm{End}} : E \to E$ differenzierbar? Zeige für $T, H \in E$ mit $T \circ H = H \circ T$ die Formel: $(D\exp^{\mathrm{End}})_T(H) = H \circ \exp^{\mathrm{End}}(T)$. Zeige für $T, H \in E$:

$$(D\exp^{\mathrm{End}})_T(H) = H + \frac{1}{2}(H \circ T + T \circ H) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}\{T, H\}_n$$

Hinweis: zeige vorerst die Abschätzung $||\{T, H\}_n||_E \leq n||T||_E^{n-1}||H||_E$ und dann die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}, n>1} \frac{1}{n!}\{T, H\}_n$ in $\mathrm{End}(V)$ mit Norm $||\,||_E$. Schreibe Abschätzungen der Aufgabe 1 für $T, H \in E, ||H||_E \leq 1$, um in $||(T + H)^n - T^n - \{T, H\}_n||_E \leq ||H||_E^2(||T||_E + 1)^n$ und $||\mathrm{Rest}(T, H)||_E \leq ||H||_E^2 \exp(||T||_E + 1)$. Etabliere die Differenzierbarkeit der Abbildung $\exp^{\mathrm{End}}$.

Aufgabe 8. Zeichne die Kurve $\gamma :]-1, +1[\to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \sqrt{1 - t^2}\cos(100t)e_1 + \sqrt{1 - t^2}\sin(100t)e_2 + te_3$. Sei X auf $\Omega := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < z(p) < 1\}$ das Vektorfeld

$$X_p := e_3 + 100(x(p)e_2 - y(p)e_1) - \frac{2z(p)}{1 - z(p)^2}(x(p)e_1 + y(p)e_2)$$

Zeige, dass die Kurve γ eine Lösung der Differentialgleichung zum Vekterfeld X ist. Mit der Kurve γ aus Vanilladraht kann man ein Osterei aus Schokolade armieren.

Frohe Ostern!