Prof. N. A'Campo Fruehlingssemester 2008

Übungen zur Vorlesung Infini II

4. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei X auf $\mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $p \in \mathbb{R}^3 \mapsto X_p \in \mathbb{R}^3$, dass durch

$X_p := 10(y(p) - x(p))e_1 + (28x(p) - y(p) - x(p)z(p))e_2 + (x(p)y(p) - 8/3z(p))e_3$

gegeben ist. Eine Lösungskurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist differenzierbar und erfüllt die Gleichung:

$$\gamma'(t) = (D\gamma)_t(1) = X_{\gamma(t)}, t \in \mathbb{R}$$

Seien $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $a(t) = x(\gamma(t))$, $b(t) = y(\gamma(t)), c(t) = z(\gamma(t)), t \in \mathbb{R}$, gegeben. Eine Lösungskurve γ der Differentialgleichung zu X entspricht nun ein Tripel (a, b, c) von differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$, die folgendes System von Differentialgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} a'(t) &= 10(b(t) - a(t)), \\ b'(t) &= 28a(t) - b(t) - a(t)c(t), \\ c'(t) &= a(t)b(t) - 8/3c(t) \end{aligned}$$

Ich empfehle das Studium der Seite
`http//www.ams.org/featurecolumn/archive/lorenz.html`
und auch die Links dieser Seite. Die Lösungskurven sind relevant für Zahlentheorie, Knotentheorie, Biologie und Meteo! Hier die Aufgabe: Finde eine periodische Lösungskurve.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Ist das Vektorfeld X stetig? differenzierbar? Lipschitz? Lokallipschitz?

Aufgabe 3. (Fortsetzung) Berechne das Differential an der Stelle $p \in \mathbb{R}^3$ des Vektorfeldes $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4. Bestimme alle $p \in \mathbb{R}^n$ wo die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(p) = ||p||^2_{\text{Max}}$ differenzierbar ist.

Aufgabe 5. Zeige, dass die Funktion $u \in \mathbb{R}^2 \mapsto ||u||_7 := (|x(u)|^7 + |y(u)|^7)^{1/7} \in \mathbb{R}$ eine Norm ist. Zeichne den Einheitsball dieser Norm. Ist die Funktion $p \in \mathbb{R}^2 \mapsto ||p||_7^2 \in \mathbb{R}$ differenzierbar?

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Bestimme ein $a = a_7 \in]0, 1]$, möglichts gross, derart, dass für alle $u \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$a||u||_{\text{Max}} \leq ||u||_7 \leq 1/a||u||_{\text{Max}}$$

Aufgabe 7. (Fortsetzung). Definiere $|| \, ||_k, a_k, k \in \mathbb{N}, k > 0$, statt für $k = 7$, wie in Aufgabe 6. Zeige:

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 1$$