Prof. N. A'Campo Fruehlingssemester 2008

Übungen zur Vorlesung Infini II

3. Aufgabenblatt

Teilkurzfassung der Vorlesung.
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $e_1, e_2, \cdots, e_d, d \in \mathbb{N}$ und Koordinatenfunktionen $x_1, x_2, \cdots, x_d : V \to \mathbb{R}$. Für jedes $u \in V$ gelten die Normungleichungen:

$$||u||_{\text{Max}} \leq ||u||_{\text{Eukl}} \leq ||u||_{\Sigma} \leq \text{Dim}(V)\, ||u||_{\text{Max}}$$

Sei $u \in V \mapsto ||u||_V \in \mathbb{R}$ eine Norm auf V. Dann gilt die Normungleichung:

$$||u||_V \leq A||u||_{\text{Max}}, u \in V$$

wobei die Konstante $A \in \mathbb{R}$ nicht von $u \in V$ abhängt. Man kann zum Beispiel $A = ||e_1||_V + ||e_2||_V + \cdots + ||e_d||_V$ wählen.

Eine Folgerung dieser Normungleichung ist, dass die Funktion $u \in V \mapsto ||u||_V \in \mathbb{R}$ stetig auf V im Sinne der Norm $||\,||_{\text{Max}}$ ist. Die Funktion $u \in V \mapsto ||u||_V \in \mathbb{R}$ ist sogar auf V gleichmässig stetig im Sinne der Norm $||\,||_{\text{Max}}$. Es gilt nämlich für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ die Existenz eines $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, derart, dass für alle $p, q \in V$ mit $||p - q||_{\text{Max}} < \delta$ die Ungleichung $|\,||q||_V - ||p||_V| < \epsilon$. Dazu setze: $\delta := \frac{1}{A}\epsilon$. Tatsächlich, schreibe q unständlich als $q = p + (q - p)$, und erhalte $||q||_V \leq ||p||_V + ||q - p||_V$. Es folgt

$$||q||_V - ||p||_V \leq ||q - p||_V \leq A||q - p||_{\text{Max}} < A\delta = \epsilon$$

Indem wir umständlich $p = q + (p - q)$ schreiben erhälten wir $||p||_V - ||q||_V < \epsilon$.

Es gilt die Normungleichung:

$$||u||_{\text{Max}} \leq S||u||_V, u \in V$$

wobei die Konstante $S \in \mathbb{R}$ nicht von $u \in V$ abhängt. Wie zeigen wir nun die Existenz einer Konstante S? Vorerst, definiere die Teilmenge $E := \{u \in V \mid ||u||_{\text{Max}} = 1\}$ in V. Dann setze zum Beispiel

$$S := \text{Supremum}_{u \in E} \frac{1}{||u||_V}$$

Wir haben eine Konstante S gefunden, natürlich unter den Vorbehalt, dass das Supremum

$$\text{Supremum}_{u \in E} \frac{1}{||u||_V}$$

existiert.

Die Teilmenge E hat die Eigenschaft: jede Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E hat eine Teilfolge $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wobei σ strikt wachsend ist, die im Sinne der Norm $|| \, ||_{\mathrm{Max}}$ zu einem $v \in E$ konvergiert.

Die Funktion $f : E \to \mathbb{R}, u \in E \mapsto 1/||u||_V \in \mathbb{R}$ ist stetig.

Es folgt nun, siehe Infinitesimalrechnen 1, dass die Funktion f nach oben beschränkt ist, dass $\mathrm{Supremum}_{u\in E} \frac{1}{||u||_V}$ existiert, sogar dass ein $v \in E$ mit $f(v) = \mathrm{Supremum}_{u\in E} \frac{1}{||u||_V}$ existiert.

Wir erhalten den

Satz: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $e_1, e_2, \cdots, e_d$. Sei $|| \, ||_V$ eine Norm auf V. Dann existieren Konstanten $a, A \in \mathbb{R}, 0 < a, 0 < A$, derart, dass für jedes $u \in V$ gilt:

$$a||u||_{\mathrm{Max}} \leq ||u||_V \leq A||u||_{\mathrm{Max}}$$

Aufgabe -1. Zeige, dass jede Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E, siehe hier oben, eine im Sinne der Norm $|| \, ||_{\mathrm{Max}}$ konvergente Teilfolge hat. Hinweis: für jedes $k = 1, 2, \cdots, d = \mathrm{Dim}(V)$ ist $(x_k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[-1, 1]$, hat somit, siehe Infini 1 eine in $[-1, 1]$ konvergente Teilfolge. Wähle $\pi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt wachsend derart, dass $(x_1(u_{\pi_1(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ in $[-1, 1]$ konvergiert. Wähle $\pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt wachsend derart, dass $(x_2(u_{\pi_1(\pi_2(n))}))_{n\in\mathbb{N}}$ in $[-1, 1]$ konvergiert, u.s.w. Setze $\sigma := \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_d$.

Aufgabe 0. Zeige, dass die Funktion f, siehe hier oben, beschränkt ist.

Aufgabe 1. Ist $t \in [0, 1] \mapsto \sqrt{\sqrt{t^2(1-t)^2}} \in \mathbb{R}$ Lipschitzstetig?

Aufgabe 2. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1. Wir nehmen an, dass $f(0) = f(1) = 0$ gilt. Berechne in $\mathbb{R}^2$ mit Maximumnorm $||u||_{\mathrm{Max}} := \mathrm{Maximum}\{|x(u)|, |y(u)|\}$ die Länge $L_{|| \, ||_{\mathrm{Max}}}(\gamma)$ der Kurve $\gamma_f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) := (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3. (Fortsetzung) Wir statten nun $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Norm $||u||_{\mathrm{Eukl}} := \sqrt{x(u)^2 + y(u)^2}$ aus. Schätze die $L_{|| \, ||_{\mathrm{Eukl}}}(\gamma_f)$ durch $\sqrt{2}L_{|| \, ||_{\mathrm{Max}}}(\gamma_f)$ nach oben ab.

Aufgabe 4. (Fortsetzung). Gebe unendlich viele Beispiele von Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1) = 0$ und mit Lipschitzkonstante 1 derart, dass die Abschätzung in Übung 3 scharf ist.

Aufgabe 4. (Fortsetzung) Konstruiere eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derart, dass die Länge der Kurve γ_f unendlich ist.

Aufgabe 5. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ konvex und stetig. Ist die Länge der Kurve γ_f endlich? Ist f Lipschitzstetig? Ist f auf $[1/3, 2/3]$ Lipschitzstetig?

Aufgabe 6. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ differenzierber. Ist die Länge der Kurve γ_f endlich? Ist f Lipschitzstetig?