Prof. N. A'Campo Fruehlingssemester 2008

Übungen zur Vorlesung Infini II

2. Aufgabenblatt

Notation: Für $u, v \in V, V$ $\mathbb{R}$-Vektorraum, heisst die Menge $[u, v] := \{tu+(1-t)v \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$ Strecke in V mit Endpunkten u und v.
Notation: Ist V normiert mit $|| \, ||_V$, so heisst die Menge $B_V^{|| \, ||_V}(u,t) := \{v \in V \mid ||u-v||_V \leq t\}$ Ball mit Rand in V um u vom Radius t. Die Menge $b_V^{|| \, ||_V}(u,t) := \{v \in V \mid ||u-v||_V < t\}$ heisst Ball ohne Rand um u vom Radius t.

Aufgabe 1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $e_1, e_2, \cdots, e_d$ und Koordinatenfunktionen $x_1, x_2, \cdots, x_d$. Die Abbildung $B : V \times V \to \mathbb{R}$ mit $B(u,v) = x_1(u)x_1(v) + x_2(u)x_2(v) + \cdots + x_d(u)x_d(v), u, v \in V$, ist ein Skalarprodukt auf V. Zeige: $B(u,v)^2 \leq B(u,u)B(v,v), u, v \in V$. Hinweis: Für alle $t \in \mathbb{R}, u, v \in V$ gilt $B(u+tv, u+tv) = B(u,u) + 2tB(u,v) + t^2B(v,v) \geq 0$, somit ist die Diskriminante $4B(u,v)^2 - 4B(u,u)B(v,v)$ negativ.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Die Euklidische Norm auf V mit Basis $e_1, e_2, \cdots, e_d$ schreibt sich mittels dem Skalarprodukt B wie folgt: $||u||_{V,\mathrm{Eukl}} = \sqrt{B(u,u)}, u \in V$. Zeige, dass $|| \, ||_{V,\mathrm{Eukl}} : V \to \mathbb{R}$ eine Norm ist.

Aufgabe 3. Sei V ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis e_1, e_2. Die Koordinatenfunktion zu dieser Basis notieren wir mit $x, y : V \to \mathbb{R}$. Für $u \in V$ definieren wir die Normen $||u||_{V,\mathrm{Max}} := \mathrm{Maximum}\{|x(u)|, |y(u)|\}$ und $||u||_{V,\Sigma} := |x(u)| + |y(u)|$. Sei $G_u \subset \mathbb{R}^2$ die Teilmenge $G_u := \{(r,s) \in \mathbb{R}^2 \mid r, s \geq 0, b_V^{|| \, ||_{V,\mathrm{Max}}}(0,r) \cap b_V^{|| \, ||_{V,\Sigma}}(u,s) = \emptyset\}$. Zeige, dass G_u ein Viereck (O, A, B, C) mit Ecken $O = (0,0), A = (||u||_{V,\mathrm{Max}}, 0), C = (0, ||u||_{V,\Sigma})$ und
$B = (\mathrm{Min}(|x(u)|, |y(u)|), \mathrm{Max}(|x(u)|, |y(u)|) - \mathrm{Min}(|x(u)|, |y(u)|))$ und Kanten $[O,A], [A,B], [B,C], [C,O]$ ist. Berechne den Flächeninhalt $I(u)$ von G_u und zeige: $\sqrt{2I(u)} = ||u||_{V,\mathrm{Eukl}}$.

Aufgabe 4. Zwei rationale Zahlen $a/b, c/d, a, c \in \mathbb{Z}, b, d\mathbb{N}, b, d \neq 0$ bilden ein Fahrrad, wenn $ad - bc = -1$ gilt. Zeige: $a/b < c/d$. Wir nennen $c/d - a/b = \frac{1}{bd}$ den Radstand des Fahrrads. Zeichne die Kreise $K_{a/b}$ und $K_{c/d}$ in $\mathbb{R}^2$. Für eine rationale Zahl $p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q > 0, ggT(p,q) = 1$ ist $K_{p/q}$ der Kreis mit Zentrum $(p/q, \frac{1}{2q^2}) \in \mathbb{R}^2$ und Radius $\frac{1}{2q^2}$. Die Kreise $K_{a/b}$ und $K_{c/d}$ berühren sich und berühren die X-Achse in a/b und c/d. Die Vereinigung ist ist wie ein Fahrrad. Sei $r \in \mathbb{R}, r \notin \mathbb{Q}$. Ein Fahrrad $a/b, c/d$ mit $a/b < r < c/d$ ist für r. Zeige, dass ein eindeutiges Fahrrad mit Radstand 1 für r ist.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Sei $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$. Zeige, dass unendlich viele Fahrräder für r sind, aber nur endlich viele mit Radstand $> \epsilon$. Hinweis: ist $a/b, c/d$ ein Fahrrad, dann auch $a/b, (a+c)/(b+d)$ und $(a+c)/(b+d), c/d$.

Aufgabe 6. Konstruiere eine geschachtelte Folge von Fahrrädern für $\pi =$

$\sqrt{6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$. Suche nach 22/7 und 355/113.