Prof. N. A'Campo Fruehlingssemester 2008

Übungen zur Vorlesung Infini II

11. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $|a_{n+1}-a_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$. Ist die Folge konvergent?

Aufgabe 2. Sei V ein normierter endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V. Wir nehmen an, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleigungen $||a_{2n+2}-a_{2n}||_V \leq 2^{-n}$ und $||a_{3n+3}-a_{3n}||_V \leq 3^{-n}$ gelten. Ist die Folge konvergent?

Aufgabe 3. Sei $j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{j^n}{n+1}$ konvergent?

Aufgabe 4. Hat die 1-Differentialform $\sin(y)dx + \cos(x)dy$ eine Stammfunktion?

Aufgabe 4. Sei $X : \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ das Vektorfeld $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2) \mapsto AJ \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, wobei $J \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ durch $J(e_1) = e_2$ und $J(e_2) = -e_1$ gegeben ist. Löse mit Anfangsbedingung $\gamma(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ die Differentialgleichung zu X.

Aufgabe 5. Zeige $d(fgdx_1) = gdf \wedge dx_1 + fdgdx_1$ für differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. Sei V ein normierter endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $X : V \to V$ das Vektorfeld $X_p = \sqrt{||p||_V^3}A(p), p \in V$ wobei $A : V \to V$ linear ist. Hat die Differentialgleichung zu X für alle oder einige Anfangsbedingungen eindeutige Lösungen $\gamma : [0, \infty[\to V$?

Aufgabe 7. Sei $\alpha = x_1dx_2 + x_3dx_4$ auf $\mathbb{R}^4$. Berechne $\omega = d\alpha$ und $\omega \wedge \omega$.

Aufgabe 8. Sei $\alpha = dx_5 - x_1dx_2 - x_3dx_4$ auf $\mathbb{R}^5$. Berechne $\alpha \wedge d\alpha \wedge d\alpha$.