Prof. N. A'Campo Fruehlingssemester 2008

Übungen zur Vorlesung Infini II

10. Aufgabenblatt

Aufgabe 1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $e_1, e_2, \cdots, e_n$ und Koordinatenfunktionen $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Sei $|| \, ||_V$ eine Norm auf V. Sei $p \in V$. Seien $u, v \in V$. Für $s \in \mathbb{R}$ sei $\Gamma_p(su, sv)$ der Weg, der aus den 4 Strecken $[p, p+su], [p+su, p+su+sv], [p+su+sv, p+sv], [p+sv, p]$ zusammengesetzt ist. Berechne die Wegintegrale

$$\int_{\Gamma_p(su,sv)} \omega$$

wobei ω die 1-Differentialform dx_1 oder $x_1 dx_1$ oder $x_2 dx_1$ ist.

Aufgabe 2. (Fortsetzung). Sei $A : V \to \mathbb{R}$ linear. Sei $\alpha : V \to V^*$ die 1-Differentialform mit $\alpha_q = A, q \in V$. Berechne $\int_{\Gamma_p(su,sv)} A dx_1$. Zeige: $\lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2} \int_{\Gamma_p(su,sv)} A dx_1 = (\alpha \wedge dx_1)_p(u, v)$.

Aufgabe 3. (Fortsetzung). Zeige: $d(A dx_1) = \alpha \wedge dx_1$.

Aufgabe 4. (Fortzetzung). Sei $f : V \to \mathbb{R}$ eine stetig diffenzierbare Funktion, d.h dass $df : V \to V*$ stetig ist. Sei $f(p+h) = f(p) + A(h) + \text{Rest}(h)$ eine Dreigliedentwicklung für f an der Stelle p. Sei $R : V \to \mathbb{R}$ die Funktion $R(q) := \text{Rest}(q-p)$. Berechne die Wegintegrale $\int_{\Gamma_p(su,sv)} \omega$ wobei ω die 1-Differentialform $f(p)dx_1$ oder $A dx_1$ oder $R dx_1$ ist.

Aufgabe 5. (Fortsetzung). Zeige $d(f dx_1) = df \wedge dx_1$.

Aufgabe 6. (Fortsetzung). Sei $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n$ eine 1-Differentialform auf V, wobei die Funktionen $a_1, a_2, \cdots, a_n : V \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind. Berechne $d\omega$.

Aufgabe 7. Sei $\omega = e^x dy$ auf $\mathbb{R}^2$. Berechne $d\omega$.

Aufgabe 8. Sei $\alpha = dz - y dx$ auf $\mathbb{R}^3$. Berechne $\alpha \wedge d\alpha$.