Umkehrsatz für differenzierbare Funktionen

Seien $(V, || \, ||_V$ und $(W, || \, ||_W)$ normierte endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Sei $U \subset V$ eine offene Teilmenge in V und sei $f : U \to W$ eine stetig differenzierbare Funktion. Im ersten Teil dieses Skripts werden wir aus zusätzlichen Annahmen über das Differential $(Df)_p : V \to W$ an der Stelle $p \in U$ Eigenschaften für die Funktion f herleiten. Im zweiten Teil wird der sogenannte Umkehrsatz behandelt. Im dritten Teil kommen Anwendungen. Wir werden die Notationen $b^V(p, R) := \{q \in V \mid ||p - q||_V < R\}$ und $B^V(p, R) := \{q \in V \mid ||p - q||_V \leq R\}$ für $p \in V$ und $R \in R, R > 0$, gebrauchen. Die Teilmenge $b^V(p, R)$ heisst offene Kugel mit Zentrum p und mit Radius R im Raum V. Die Teilmenge $B^V(p, R)$ heisst abgeschlossene Kugel mit Zentrum p und mit Radius R im Raum V. Für $p \in U$ und U offene Teilmenge in V existiert ein $R \in \mathbb{R}, R > 0$, mit $b^V(p, R) \subset U$. Für jede Zahl $R' \in \mathbb{R}$ mit $0 < R' < R$ gilt dann $B^V(p, R') \subset U$.

1.1 Wir machen zunächst die zusätzliche Annahme, dass das Differential $(Df)_p : V \to W$ an der Stelle $p \in V$ injektiv ist.

Sei

$$\Lambda := ||(Df)_p||_{V,W} := \mathrm{Sup}_{h \in V, h \neq 0} \frac{||(Df)_p(h)||_W}{||h||_V}$$

die Operatornorm des Differentials und sei

$$\lambda := \mathrm{Inf}_{h \in V, h \neq 0} \frac{||(Df)_p(h)||_W}{||h||_V}.$$

die sogenannte Ko-Operatornorm des Differentials. Es gilt $\lambda \leq \Lambda$. Da wir angenommen haben, dass das Differential $(Df)_p$ injektiv ist und der Raum V endlicher Dimension ist, gilt $\lambda > 0$. Für $h \in V$ gilt nun

$$\lambda ||h||_V \leq ||(Df)_p(h)||_W \leq \Lambda ||h||_V$$

und somit ist das Differential $(Df)_p : V \to W$ eine Lipschitz-Einbettung von V in W.

Da U eine offene Teilmenge in V ist, existiert ein $R \in \mathbb{R}, R > 0$, mit $B^V(p, R) \subset U$.

Sei nun $R^{(1)} \in \mathbb{R}, 0 < R^{(1)} \leq R$, so gewählt, dass für $||h||_V \leq R^{(1)}$ das Restglied $R(p, h) \in W$ der Dreigliedentwickelung

$$f(p + h) = f(p) + (Df)_p(h) + R(p, h)$$

die Abschätzung $||R(p, h)||_W \leq 1/2 \, \lambda ||h||_V$ erfüllt. Ein solches $R^{(1)}$ existiert, da hier $1/2 \, \lambda > 0$ ist, und da das Restglied relativ klein zu h ist.

Daraus folgt, dass f die folgende Eigenschaft hat: für $q \in B^V(p, R^{(1)})$ mit $q \neq p$ gilt $f(p) \neq f(q)$.

Denn für $h = q - p$ gilt die Abschätzung

$$||f(q) - f(p)||_W = ||(Df)_p(h) + R(p,h)||_W \geq$$
$$||(Df)_p(h)||_W - ||R(p,h)||_W \geq$$
$$\lambda||h||_V - 1/2\,\lambda||h||_V = 1/2\,\lambda||h||_V > 0.$$

Beachte, dass wir nicht behaupten, es gäbe ein $R^{(1)} > 0$ mit $f(q_1) \neq f(q_2)$ für $q_1, q_2 \in B^V(p, R^{(1)}), q_1 \neq q_2$.

Als Beispiel untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + x^2 \sin(\frac{1}{x^3})$ an der Stelle $x = 0$; f ist differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar!

1.2 Wir machen wieder die zusätzliche Annahme, dass das Differential $(Df)_p : V \to W$ an der Stelle $p \in V$ injektiv ist, aber wir werden in der Argumentation auch ausnutzen, dass f stetig differenzierbar ist.

Per Definition ist $f : U \to W$ stetig differenzierbar, wenn die Zuordnung $q \in U \mapsto (Df)_q \in \mathrm{Hom}(V,W)$ stetig ist. Wegen der Stetigkeit der Zuordnung $q \in U \mapsto (Df)_q \in \mathrm{Hom}(V,W)$ an der Stelle $p \in U$, existiert also zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, ein $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, derart, dass für $q \in B^V(p,\delta)i \cap U$ gilt:

$$||(Df)_p - (Df)_q||_{V,W} \leq \epsilon.$$

Es sei bereits $R \in \mathbb{R}, R > 0$, so gewählt, dass $B^V(p,R) \subset U$ gilt.

Wir erhalten die zusätzliche Eigenschaft der Existenz eines $R^{(2)} \in \mathbb{R}, 0 < R^{(2)} \leq R$, derart, dass für $q \in B^V(p, R^{(2)})$ das Differential $(Df)_q : V \to W$ injektiv ist. Denn wähle $R^{(2)} \in R, 0 < R^{(2)} \leq R$, so, dass für $q \in B^V(p, R^{(2)})$ gilt:

$$||(Df)_p - (Df)_q||_{V,W} \leq 1/2\,\lambda.$$

Für $q \in B^V(p, R^{(2)})$ und $h \in V, h \neq 0$, gilt dann

$$||(Df)_q(h)||_V = ||(Df)_p(h) + ((Df)_q - (Df)_p)(h)||_W \geq$$
$$||(Df)_p(h)||_W - ||((Df)_q - (Df)_p)(h)||_W$$
$$\geq \lambda||h||_V - 1/2\,\lambda||h||_V = 1/2\,\lambda||h||_V > 0,$$

und somit ist für $q \in B^V(p, R^{(2)})$ das Differential $(Df)_q$ injektiv.

Wir können die erzielte Eigenschaft wie folgt schärfer formulieren: Ist die Ko-Norm des Differentials $(Df)_p$ gleich $\lambda > 0$, dann sind die Ko-Normen der Differentiale $(Df)_q$, wobei q eine Kugel $B^V(p, R^{(2)})$ durchläuft, grösser gleich $1/2\,\lambda$.

1.3 Wir machen wieder die zusätzliche Annahme, dass das Differential $(Df)_p : V \to W$ an der Stelle $p \in V$ injektiv ist.

Die Eigenschaft, die wir herleiten, ist die Existenz eines $R^{(3)} \in \mathbb{R}, 0 < R^{(3)} \leq R$, derart, dass für $q_1, q_2 \in B^V(p, R^{(3)}), q_1 \neq q_2$, gilt $f(q_1) \neq f(q_2)$.

Diese Eigenschaft lässt sich prägnant so formulieren: Ist das Differential an einer Stelle $p \in U$ injektiv, dann ist f an der Stelle p lokal injektiv. Dabei bedeutet *lokal injektiv an der Stelle* p, dass für ein $R^{(3)} > 0$ die Einschränkung von f auf $B^V(p, R^{(3)})$ injektiv ist.

Denn wähle $R^{(3)} = R^{(2)}$. Für $q_1, q_2 \in B^V(p, R^{(2)})$ liegt der Weg

$$t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) := (1-t)q_1 + tq_2 \in V$$

ganz in $B^V(p, R^{(2)})$ und verbindet die Punkte q_1, q_2. Es gilt:

$$f(q_2) - f(q_1) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) =$$

$$\int_0^1 (Df)_{\gamma(t)}(\frac{d}{dt}\gamma(t))dt\,,$$

da $f \circ \gamma$ Stammfunktion des Integranden $(Df)_{\gamma(t)}(\frac{d}{dt}\gamma(t))$ ist.

Bemerke $\frac{d}{dt}\gamma(t) = q_2 - q_1, t \in [0,1]$. Es folgt nun

$$f(q_2) - f(q_1) =$$

$$\int_0^1 (Df)_p(q_2 - q_1)dt + \int_0^1 ((Df)_{(1-t)q_1+tq_2} - (Df)_p)(q_2 - q_1)dt =$$

$$(Df)_p(q_2 - q_1) + \int_0^1 ((Df)_{(1-t)q_1+tq_2} - (Df)_p)(q_2 - q_1)dt$$

und

$$||f(q_2) - f(q_1)||_W \geq$$

$$||(Df)_p(q_2 - q_1)||_W - ||\int_0^1 ((Df)_{(1-t)q_1+tq_2} - (Df)_p)(q_2 - q_1)dt||_W \geq$$

$$\lambda||q_2 - q_1||_V - 1/2\,\lambda||q_2 - q_1||_V = 1/2\,\lambda||q_2 - q_1||_V\,,$$

da

$$||(Df)_p(q_2 - q_1)||_W \geq \lambda||q_2 - q_1||_V,$$

$$||\int_0^1 ((Df)_{(1-t)q_1+tq_2} - (Df)_p)(q_2 - q_1)dt||_W \leq$$

$$\int_0^1 ||((Df)_{(1-t)q_1+tq_2} - (Df)_p)(q_2 - q_1)||_W dt \leq$$

$$\int_0^1 1/2\,\lambda||q_2 - q_1||_V dt = 1/2\,\lambda||q_2 - q_1||_V$$

gelten.

1.4 Wir machen wieder die zusätzliche Annahme, dass das Differential $(Df)_p : V \to W$ an der Stelle $p \in V$ injektiv ist. Dann gibt es ein $R^{(4)} \in \mathbb{R}, 0 < R^{(4)} \leq R$, derart dass die Einschränkung $g := f_{|B^V(p,R^{(4)})}$ von f auf $B^V(p, R^{(4)})$ eine Lipschitz-Einbettung $g : B^V(p, R^{(4)}) \to W$ ist.

Denn wähle $R^{(4)} = R^{(2)}$. Dann gilt für $q_1, q_2 \in B^V(p, R^{(2)})$

$$1/2\,\lambda ||q_1 - q_2||_V \leq ||g(q_1) - g(q_2)||_W \leq (\Lambda + 1/2\,\lambda)||q_1 - q_2||_V.$$

Die erste Ungleichung hatten wir schon bewiesen, die zweite folgt aus:

$$||g(q_1) - g(q_2)||_W = ||f(q_2) - f(q_1)||_W \leq$$

$$||(Df)_p(q_2 - q_1)||_W + ||\int_0^1 ((Df)_{(1-t)q_1+tq_2} - (Df)_p)(q_2 - q_1)dt|| \leq$$

$$(\Lambda + 1/2\,\lambda)||q_1 - q_2||_V.$$

1.5 Wir machen wieder die zusätzliche Annahme, dass das Differential $(Df)_p : V \to W$ an der Stelle $p \in V$ injektiv ist. Dann gibt es ein $R^{(5)} \in \mathbb{R}, 0 < R^{(5)} \leq R$, derart, dass für $q_1, q_2 \in B^V(p, R^{(5)})$ der Term $R(p, q_1, q_2 - q_1)$, der durch

$$R(p, q_1, q_2 - q_1) := f(q_2) - f(q_1) - (Df)_p(q_2 - q_1)$$

definiert ist, die Abschätzung

$$||R(p, q_1, q_2 - q_1)||_W \leq 1/2\,\lambda||(q_2 - q_1)||_W$$

erfüllt.

Denn wähle $R^{(5)} = R^{(2)}$ so, dass dann für $q \in B^V(p, R^{(5)})$ gilt

$$||(Df)_p - (Df)_q||_{V,W} \leq 1/2\,\lambda.$$

Es folgt für $q_1, q_2 \in B^V(p, R^{(5)})$ (siehe oben)

$$||R(p, q_1, q_2 - q_1)||_W =$$

$$||\int_0^1 (Df)_{(1-t)q_1+tq_2} - (Df)_p(q_2 - q_1)dt||_W \leq$$

$$1/2\,\lambda||(q_2 - q_1)||_V.$$

2.1 Jetzt nehmen wir sogar an, dass das Differential $(Df)_p : V \to W$ an der Stelle $p \in V$ ein Isomorphismus von V nach W ist.

Bemerkt sei vorerst, dass die Vektorräume V und W nun gleicher Dimension sind. Das Inverse der Ko-Norm λ des Differentials $(Df)p$ stimmt überein mit der

Operatornorm $||(Df)_p^{-1}||_{W,V}$ der Umkehrung $(Df)_p^{-1} : W \to V$ des Differentials $(Df)_p$. Es gilt also

$$||(Df)_p^{-1}||_{W,V} = \frac{1}{\lambda}.$$

Die Eigenschaft, die wir herleiten, ist die Existenz eines $R^{(6)} \in \mathbb{R}, 0 < R^{(6)} \leq R$ derart, dass für jedes $0 < r < R^{(6)}$ die Inklusion $B^W(f(p), 1/2\,\lambda r) \subset f(B^V(p,r))$ gilt.

Dazu wähle wiederum $R^{(6)} = R^{(2)}$. Sei $r \in \mathbb{R}, 0 < r < R^{(2)}$. Sei $w \in B^W(f(p), 1/2\,\lambda r)$. Um die Inklusion $B^W(f(p), 1/2\,\lambda r) \subset f(B^V(p,r))$ zu zeigen, mussen wir für jedes $w \in B^W(f(p), 1/2\,\lambda r)$ ein $v \in B^V(p,r))$ mit $f(v) = w$ konstruieren. Anders gesagt, für jedes $w \in B^W(f(p), 1/2\,\lambda r)$ mussen wir die Gleichung $f(v) = w$ nach ein $v \in B^V(p,r))$ lösen.

Statt direkt ein $v \in B^V(p,r))$ mit $f(v) = w$ anzugeben, werden wir $w \in B^W(f(p), 1/2\,\lambda r)$ die Abbildung, die von Isaac Newton eingeführt ist,

$$q \in B^V(p,r) \mapsto N_w(q) := q - (Df)_p^{-1}(f(q) - w) \in W$$

zuordnen. Nun untersuchen wir die Abbildung N_w.

Es gilt $N_w(p) \in B^V(p, \frac{1}{2}r)$. Denn

$$||p - N_w(p)||_V = ||(Df)_p^{-1}(f(p) - w)||_V \leq$$

$$||(Df)_p^{-1}||_{W,V}||f(p) - w||_W \leq \frac{1}{\lambda}1/2\,\lambda r = \frac{1}{2}r.$$

Es gilt $N_w(B^V(p,r)) \subset B^V(p,r)$. Dazu für $q \in B^V(p,r)$

$$||N_w(q) - N_w(p)||_V = ||(q-p) - (Df)_p^{-1}(f(q) - f(p))||_V =$$

$$||(q-p) - (Df)_p^{-1}((Df)_p(q-p) + R(p, q-p))||_V =$$

$$||(Df)_p^{-1}(R(p, q-p))||_V \leq$$

$$||(Df)_p^{-1}||_{W,V}||R(p, q-p)||_W \leq$$

$$\frac{1}{\lambda}1/2\,\lambda r = \frac{1}{2}r.$$

Es folgt

$$||N_w(q) - p||_V \leq ||N_w(q) - N_w(p)||_V + ||N_w(p) - p||_V \leq r.$$

Da nun $N_w(B^V(p,r)) \subset B^V(p,r)$ zutrifft, können wir N_w als Abbildung $N_w : B^V(p,r) \to B^V(p,r)$ auffassen.

Die Abbildung $N_w : B^V(p,r) \to B^V(p,r)$ ist eine Lipschitz-Abbildung mit Faktor $\frac{1}{2}$. Denn für $q_1, q_2 \in B^V(p,r)$ gilt mit 1.5

$$||N_w(q_2) - N_w(q_1)||_V = ||(Df)_p^{-1}(R(p, q_1, q_2 - q_1)||_V \leq$$

$$||(Df)_p^{-1}||_{W,V}||R(p,q_1,q_2-q_1)||_W \leq$$

$$\frac{1}{\lambda}1/2\,\lambda||q_2-q_1||_V = 1/2\,||q_2-q_1||_V.$$

Die Abbildung N_w hat höchstens einen Fixpunkt. Denn angenommen $q_1, q_2 \in B^V(p,r)$ sind zwei Fixpunkte. Dann gilt

$$||q_1-q_2||_V = ||N_w(q_1)-N_w(q_2)||_V \leq \frac{1}{2}||q_1-q_2||_V$$

und folglich $||q_1-q_2||_V = 0$ und $q_1 = q_2$.

Wir zeigen, dass die Abbildung N_w einen Fixpunkt in $B^V(p,r)$ hat. Dazu betrachte die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B^V(p,r)$, die wir rekursiv definieren: $v_0 = p$ und $v_{n+1} = N_w(v_n)$. Die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in W, somit konvergent in $B^V(p,r)$. Es gilt $N_w(\lim_{n\to\infty} v_n) = \lim_{n\to\infty} v_{n+1}$, und folglich ist $v := \lim_{n\to\infty} v_n$ ein Fixpunkt für N_w.

Aber aus $v = N_w(v) = v-(Df)_p^{-1}(f(v)-w)$ folgt $f(v) = w$, also ist $v \in B^V(p,r)$ die gesuchte Lösung der Gleichung.

2.2 Sei $M \subset U$ eine nichtleere offene Teilmenge in U. Wir nehmen an, dass für alle $q \in M$ das Differential $(Df)_q : V \to W$ ein Isomorphismus ist. Die Eigenschaft betrifft das Bild $F(M) \subset W$ und besagt, dass $f(M)$ eine offene Teilmenge in W ist.

Denn für $q \in M$ existiert nach 2.1 ein $r_q \in \mathbb{R}, r_q > 0$, derart, dass $b^W(f(q), \frac{\lambda_q r_q}{2} \subset f(B^V(q,r_q))$ gilt, wobei $\lambda_q > 0$ die Ko-Norm des Differentials $(Df)_q$ ist. Es folgt $f(M) = \cup_{q\in M} b^W(f(q), \frac{\lambda_q r_q}{2}$, und somit ist $f(M)$ eine offene Teilmenge in W.

2.3 Wir formulieren und beweisen nun den Umkehrsatz für differenzierbare Funktionen.

Seien A und B offene Teilmengen in endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Ein Diffeomorphismus von A nach B ist eine Bijektion $g : A \to B$, derart dass g und die Umkehrabbildung $g^{-1} : B \to A$ differenzierbar sind. Für $p \in A$ ist die Zusammensetzung $(Dg^{-1})_(g(p) \circ (Dg)_p$ die Identitätsabbildung des Vektorraums, der A umfasst. Es folgt, dass für $p \in A$ das Differential $(Dg)_p$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Zum Beispiel ist die Abbildung $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ bijektiv, aber kein Diffeomorphismus von $A = \mathbb{R}$ nach $B = \mathbb{R}$. Die Abbildung $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 2^{-64}(x+1)^3 \in \mathbb{R}$ ist ein Diffeomorphismus.

Satz 1 *Seien $(V, ||\ ||_V$ und $(W, ||\ ||_W)$ normierte endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Sei $U \subset V$ eine offene Teilmenge in V und sei $f : U \to W$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei für ein $p \in U$ das Differential $(Df)_p : V \to W$*

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Dann existiert ein $r \in \mathbb{R}, r > 0$, mit $B^V(p,r) \subset U$ derart, dass das Bild $f(b^V(p,r))$ offen in W ist und die Einschränkung von f zu $g := b^V(p,r) \to f(b^V(p,r))$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis: Wähle $r \in \mathbb{R}, r > 0$, mit $r < R^{(2)}$. Dann gilt $b^V(p,r) \subset U$ und nach 1.2 ist die Einschränkung von f auf $b^V(p,r)$ injektiv. Weiter ist nach 1.3 für jedes $q \in b^V(p,r)$ das Differential $(Df)_q : V \to W$ injektiv, somit ein Isomorphismus, da $\operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim} W$. Es folgt nach 2.1, dass $f(b^V(p,r))$ eine offene Teilmenge in W ist. Somit ist die Einschränkung $g : b^V(p,r) \to f(b^V(p,r))$ bijektiv und auch differenzierbar.

Es bleibt zu zeigen, dass die Umkehrabbildung $g^{-1} : f(b^V(p,r)) \to b^V(p,r)$ differenzierbar ist. Dazu, sei $w \in f(b^V(p,r))$. Sei $u := g^{-1}(w) \in b^V(p,r)$. Für $h \in W$ mit $w + h \in f(b^V(p,r))$ setzen wir eine Dreigliedentwicklung an der Stelle w für g^{-1} an:

$$g^{-1}(w+h) = g^{-1}(w) + ((Df)_u)^{-1}(h) + R_{g^{-1}}(w,h) =$$

$$u + ((Df)_u)^{-1}(h) + R_{g^{-1}}(w,h).$$

Zu zeigen ist, dass der so definierte Restterm $R_{g^{-1}}(w,h)$ relativ klein zu h ist. Sei λ_u die Ko-Norm und Λ_u die Operatornorm von $(Df)_u$. Nun erhält man mit der Dreigliedentwicklung von g an der Stelle $u = g^{-1}(w)$:

$$w + h = g(g^{-1}(w+h)) = g(g^{-1}(w) + ((Df)_u)^{-1}(h) + R_{g^{-1}}(w,h)) =$$

$$g(g^{-1}(w)) + (Df)_u((Df)_u^{-1}(h)) + (Df)_u(R_{g^{-1}}(w,h)) + R_g(u,k(h)) =$$

$$w + h + (Df)_u(R_{g^{-1}}(w,h)) + R_g(u,k(h)),$$

wobei wir

$$k(h) := ((Df)_u)^{-1}(h) + R_{g^{-1}}(w,h))$$

setzen. Es folgt

$$R_{g^{-1}}(w,h) = (Df)_u^{-1}(R_g(u,k(h))).$$

Es gilt $f(u+k(h)) = g(u+k(h)) = g(u) + h = f(u) + h$. Da die Einschränkung von f auf $B^V(u,r)$ eine Lipschitz-Einbettung ist, folgt mit 1.4

$$||k(h)||_V \leq (\frac{\lambda_u}{2} + \Lambda_u)||h||_W.$$

Da g differenzierbar ist, ist das Restglied $R_g(u,k)$ relativ klein zu k. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$||R_g(u,k)||_W \leq \frac{\epsilon\lambda_u}{\frac{\lambda_u}{2} + \Lambda}||k||_V$$

gilt, sobald $k \in V, ||k||_V \leq \delta$ zutrifft. Dann gilt für

$$h \in W, ||h||_W \leq \frac{\delta}{\frac{\lambda_u}{2} + \Lambda_u}$$

die Abschätzung

$$||R_{g^{-1}}(w,h)||_V =$$
$$||(Df)_u^{-1}(R_g(u,k(h)))||_V \leq$$
$$\frac{1}{\lambda_u}\lambda_u\epsilon||k(h)||_V = \epsilon||k(h)||_V \, ,$$

womit gezeigt ist, dass $R_{g^{-1}}(w,h)$ relativ klein zu h ist. Die Umkehrabbildung g^{-1} ist somit differenzierbar und Es folgt, dass die hier oben angesetzte Dreigliedentwicklung für g^{-1} zulässig ist und dass die Umkehrabbildung g^{-1} somit differenzierbar ist.

Aus dieser Dreigliedentwicklung lässt sich auch das Differential $(Dg^{-1})_w$ der Umkehrabbildung g^{-1} an der Stelle w ablesen. Man sieht:

$$(D(g^{-1}))_w = (Dg)^{-1}_{g^{-1}(w)}.$$

■

Aufgabe 1. Seien $S := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid x(p) > 0 \,\text{und}\, y(p) > 0\}$ und $\Sigma := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid x(p) > 0 \,\text{oder}\, y(p) > 0\}$. Zeige, dass es eine differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(\mathbb{R}) \subset \Sigma \cup \{0\}$, $\gamma(0) = 0$ und $\frac{d}{dt}\gamma(0) \neq 0$ gibt. Zeige, dass es keine differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(\mathbb{R}) \subset S \cup \{0\}$, $\gamma(0) = 0$ und $\frac{d}{dt}\gamma(0) \neq 0$ gibt.

Aufgabe 2. Zeige, dass es kein Diffeomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(S) = \Sigma$ geben kann.

Aufgabe 3. Konstuire einen Diffeomorphismus $f : S \to \Sigma$.

Aufgabe 4. Sei $U := \{p \in \mathbb{R}^n \mid x_1(p) < x_2(p) < \cdots < x_n(p)\}$. Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, deren k-te Koordinatenfunktion $f_i : U \to R, 1 \leq k \leq n$, durch

$$f_k(p) = (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1}(p)x_{i_2}(p) \cdots x_{i_k}(p)$$

gegeben ist. Kontrolliere die Identität:

$$(X - x_1(p))(X - x_2(p)) \cdots (X - x_n(p)) = X^n + f_1(p)X^{n-1} + \cdots + f_n(p).$$

Zeige, dass $f(U)$ eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ ist. Zeige, dass die Menge M der Polynome n-ten Grades mit Hauptkoeffizient 1 und mit reellen Koeffizienten und n verschiedenen reellen Nullstellen eine offene Teilmenge im Raum der Polynome n-ten Grades mit Hauptkoeffizient 1 und mit reellen Koeffizienten ist.

Aufgabe 6. Zeige für $P(X) \in M$, dass die Nullstellen des Polynoms $P(X)$ differenzierbar von den Koeffizienten des Polynoms $P(X)$ abhängen.

Aufgabe 7. Ist f ein Diffeomorphismus von U nach M?

Aufgabe 8. Ist f eine Lipschitz-Einbettung von $U \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$?